

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES

NOTAS SOBRE EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

E. ALARCON

MADRID - 1.978

SECCION PUBLICACIONES

EL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Bibliografia

- 1) O.C.Zienkiewicz: "The Finite element method (3rd.Edit)"
Mc Graw 1977.
 - 2) R.H.Gallagher : "Finite element analysis. Fundamentals".
Prentice 1975.
 - 3) K.H.Huebner : "The Finite element method for Engineers".
Wiley 1975
 - 4) D.H.Norrie, G. de Vries: "The Finite element method". Academic Press. 1973.
 - 5) H.C.Martin, G.F.Carey: "Introduction to Finite element analysis". Mc. Graw 1973.
 - 6) W.G.Strang and G.Fix:"An analysis of the F.E.M." Prentice 1973.
 - 7) J.T.Oden: "Finite Elements of Non-linear continua". Mc.Graw1972
 - 8) C.Desai, J.Abel: "Introduction to the F.E.M." Van Nostrand1971
 - 9) Tottenham, Brebbia: "F.E.Techniques in Structural Mechanics".
South. 1971.
 - 10) I. Holand, K.Bell: "F.E.M. in Stress analysis". Tapir Press1969.
- Sobre aspecto matemático.
- 11) PRENTER: "Splines and variational methods" Wiley 1975.
 - 12) CIARLET: "The finite element method for elliptic problems "
North-Holland 1977.

Sobre técnicas de programación y procedimientos numéricos.

13) HINTON: "Programming F.E.M." Academic Press. 1977

14) BATHE y WILSON: "Numerical methods in F.E.analysis"
Prentice 1976

En castellano

15) BREBBIA y CONNOR: "El método de los elementos finitos en
la ingeniería civil" Colegio I.C.C.P. 1975.

INTRODUCCION

Ideas básicas

- | | | |
|---|---|--------------------|
| 1) Reducción de medio continuo a discreto | { | Elementos |
| | | Nodos |
| | | Funciones de Forma |
- 2) Definición de un estado "elemental" relacionado con otro "general", mediante el formalismo "matriz de rigidez" y vectores consistentes.
- 3) Método de síntesis de propiedades generales : Método directo de la rigidez.

Posibilidades de estudio.

- | | | |
|---|----|--|
| [| 1. | Derivación de la teoría. |
| | 2. | Modelización de problemas reales con F.E.M. |
| | 3. | Desarrollo de programas de ordenador. |
| | 4. | Estudio de métodos numéricos (Sistemas ecuacionales, autovalores, convergencia, integración, etc.) |

Contrariamente a lo que se diga el F.E.M. no elimina la necesidad de profundizar en el estudio de la Elasticidad, Matemáticas, etc.

Se trata tan sólo de un instrumento potentísimo que, en principio, permite abordar cualquier problema.

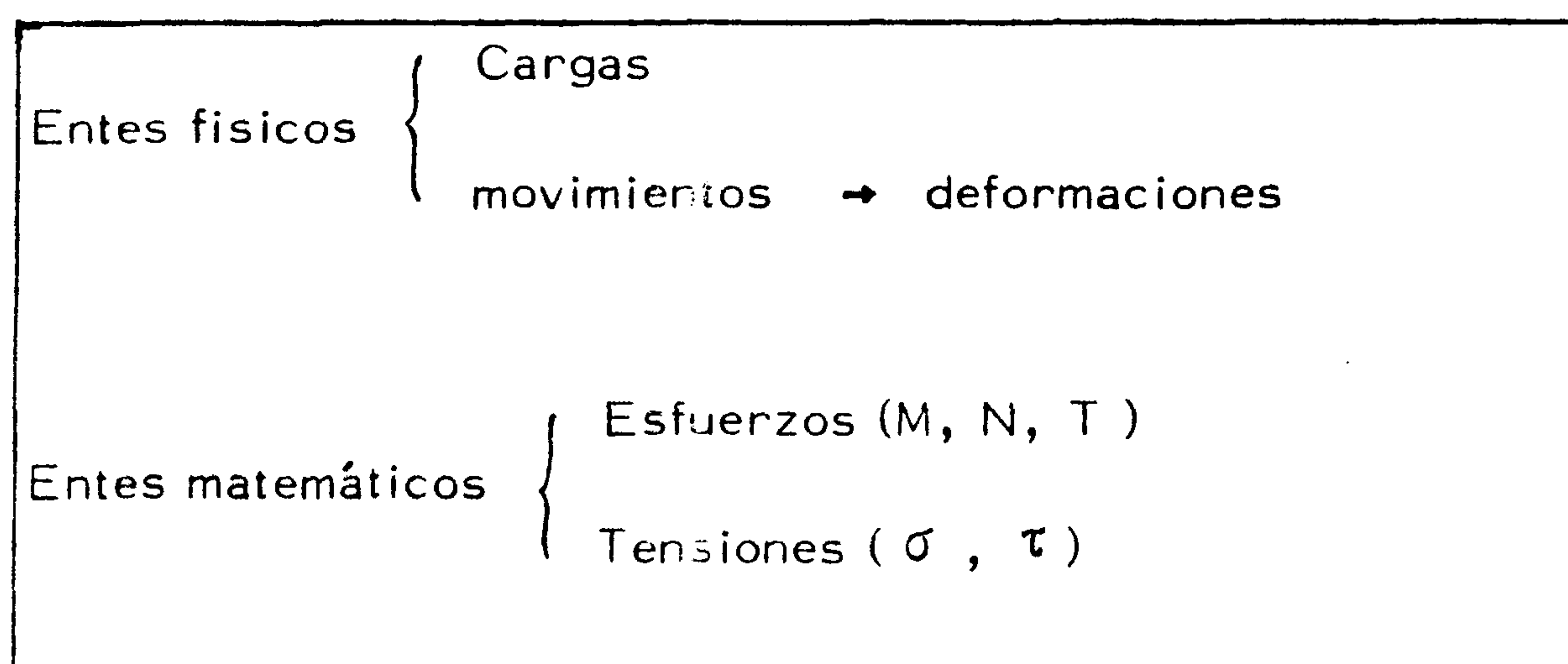
Fechas notables:

(BOEING
company)

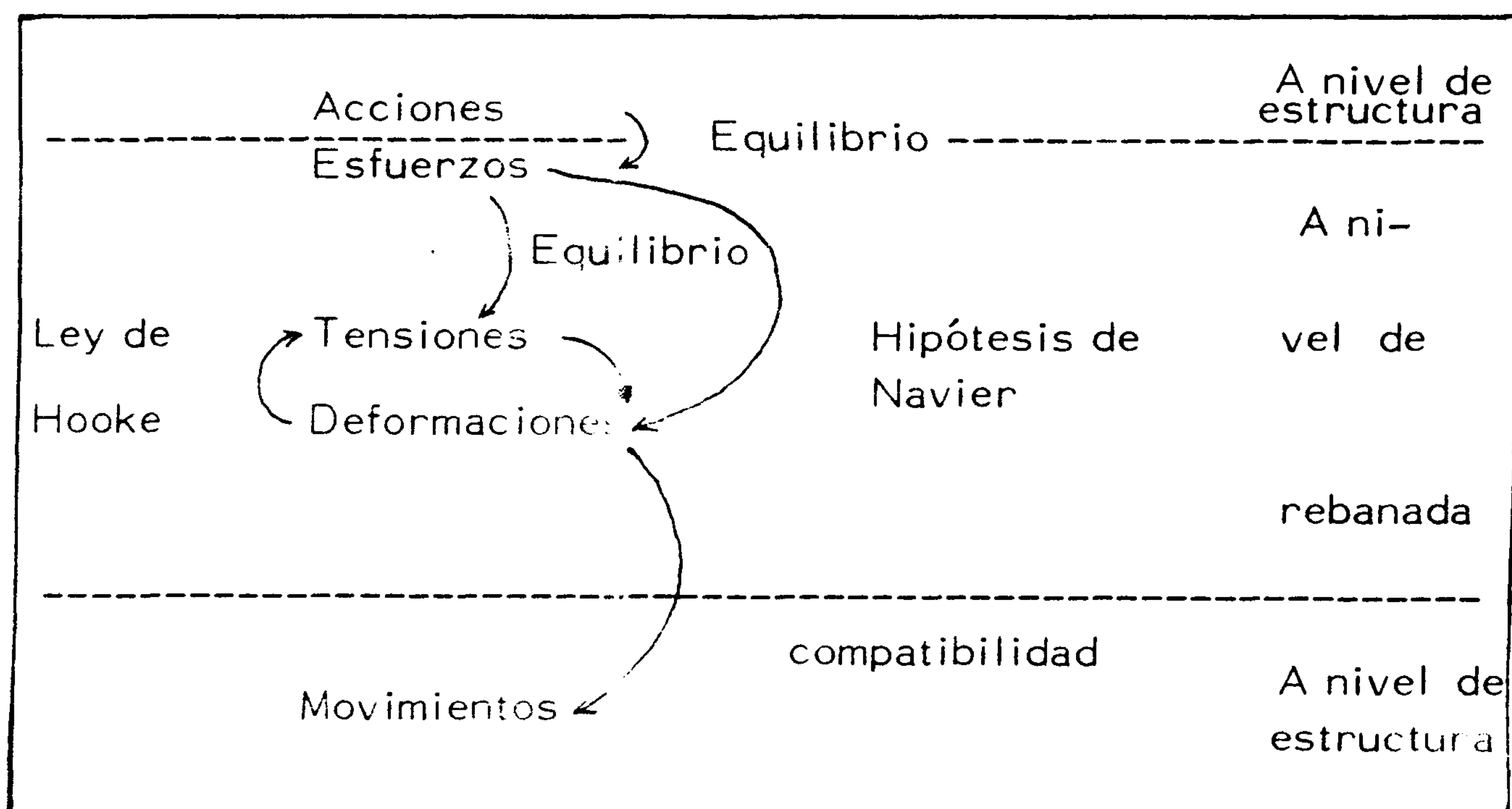
- 1) Septiembre 1956 : Turner, Clough, Martin y Topp "Stiffness and deflection analysis of - complex Structures". Journ. Aeron. Scien. vol. 23, nº 9, pp 805-824.
- 2) 1960. Argyris y Kelsey : "Energy theorems and structural analysis" Butterworth. London.
- 3) 1964. Archer : "Consistent matrix formulations for structural analysis using influence coefficient techniques". 1st. Am. Inst. Aeron. Astron. Annual Meeting. paper 64-488. June 29-July 2.
- 4) 1967. Zienkiewicks y Cheung : "The F.E. M. in structural and continuum mechanics" McGraw 1967.

Lección 1. Cálculo de estructuras.

Cómo se plantea el cálculo $\left\{ \begin{array}{l} \text{Equilibrio.} \\ \text{Compatibilidad.} \\ \text{Ley de comportamiento.} \end{array} \right.$

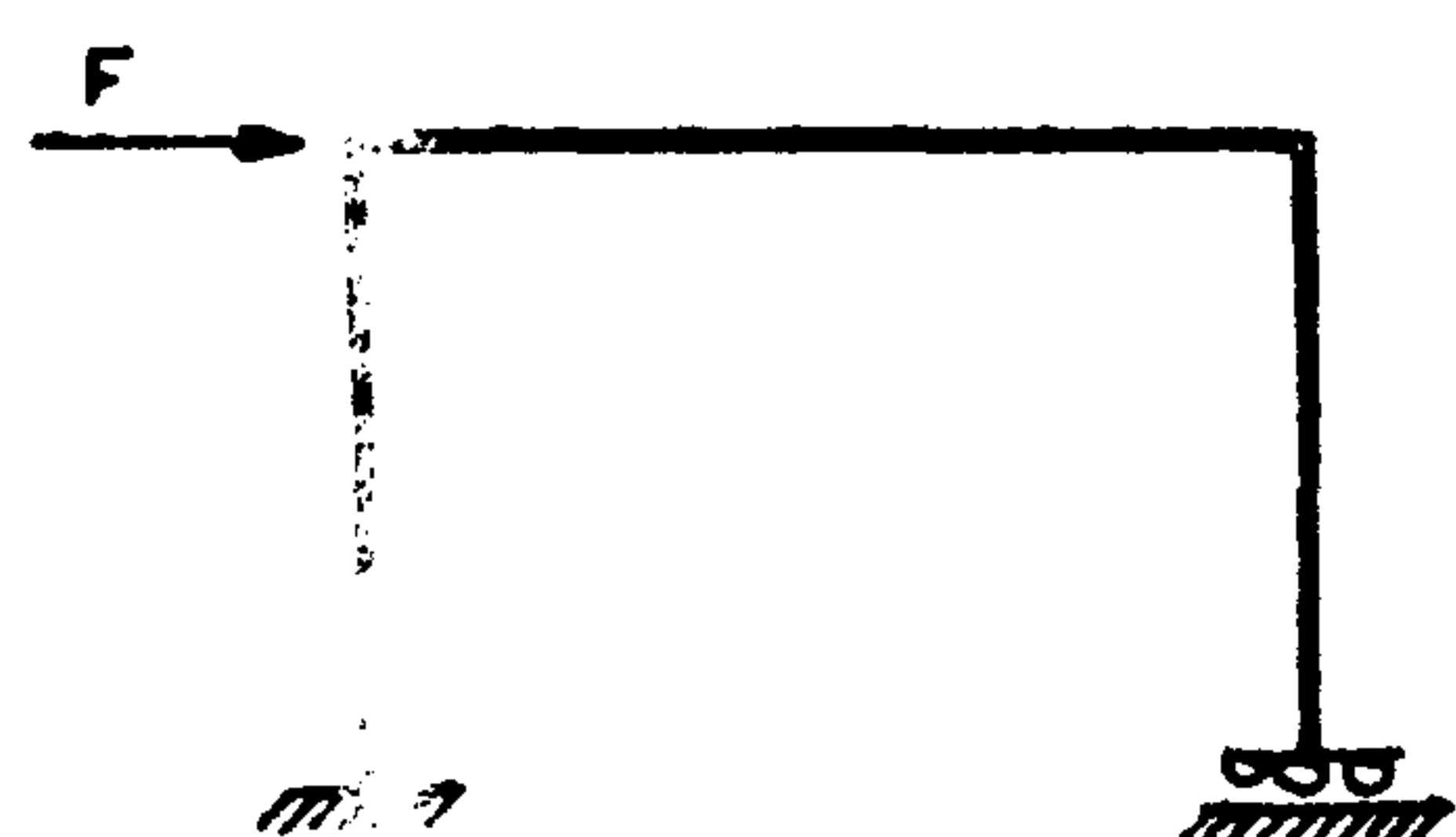


Esquema de la Resistencia de Materiales



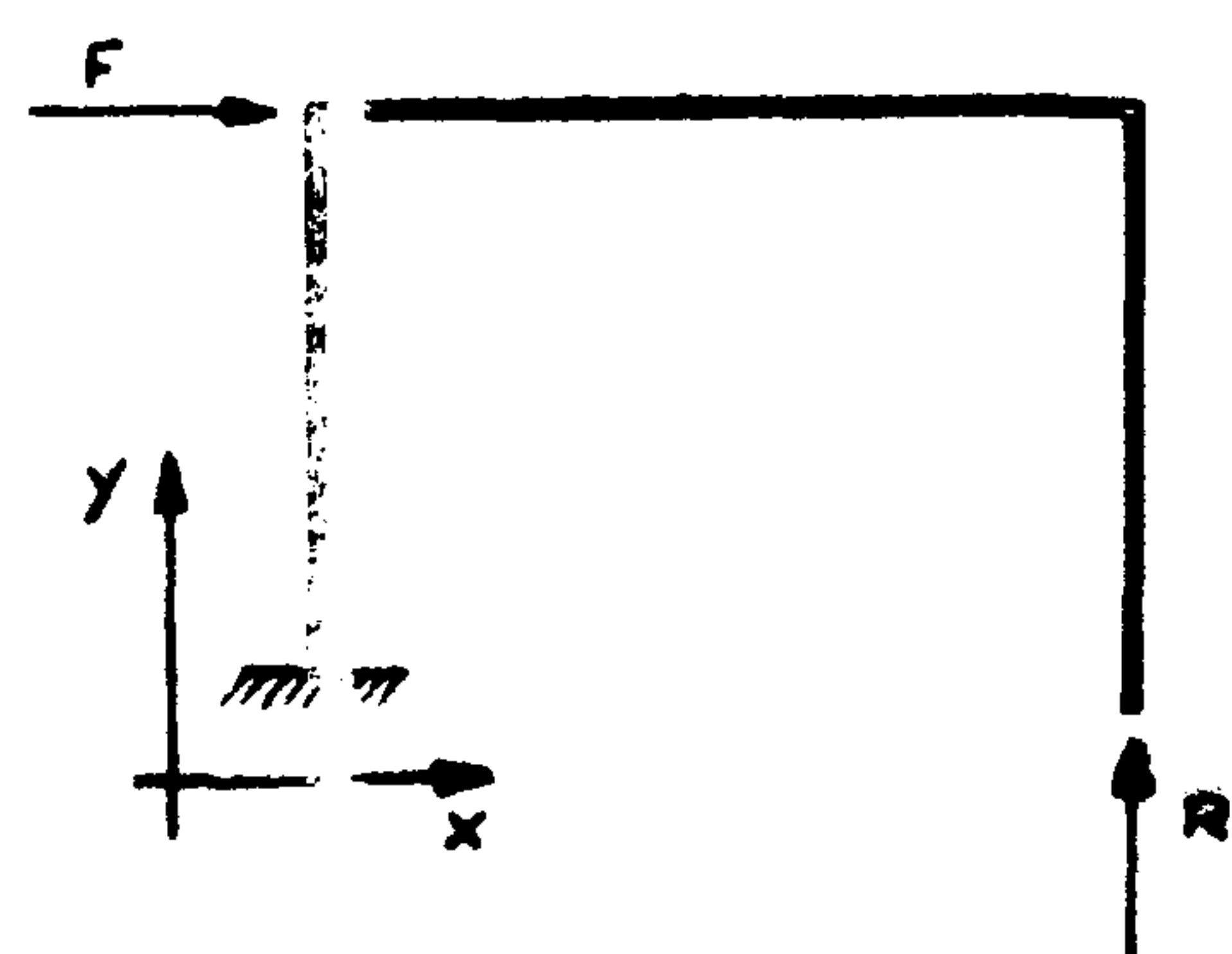
Esta forma de resolución del hiperestatismo interno se repite a nivel macroscópico para resolver los problemas - hiperestáticos en vigas y porticos.

1) Con el equilibrio se saca la ley M_f



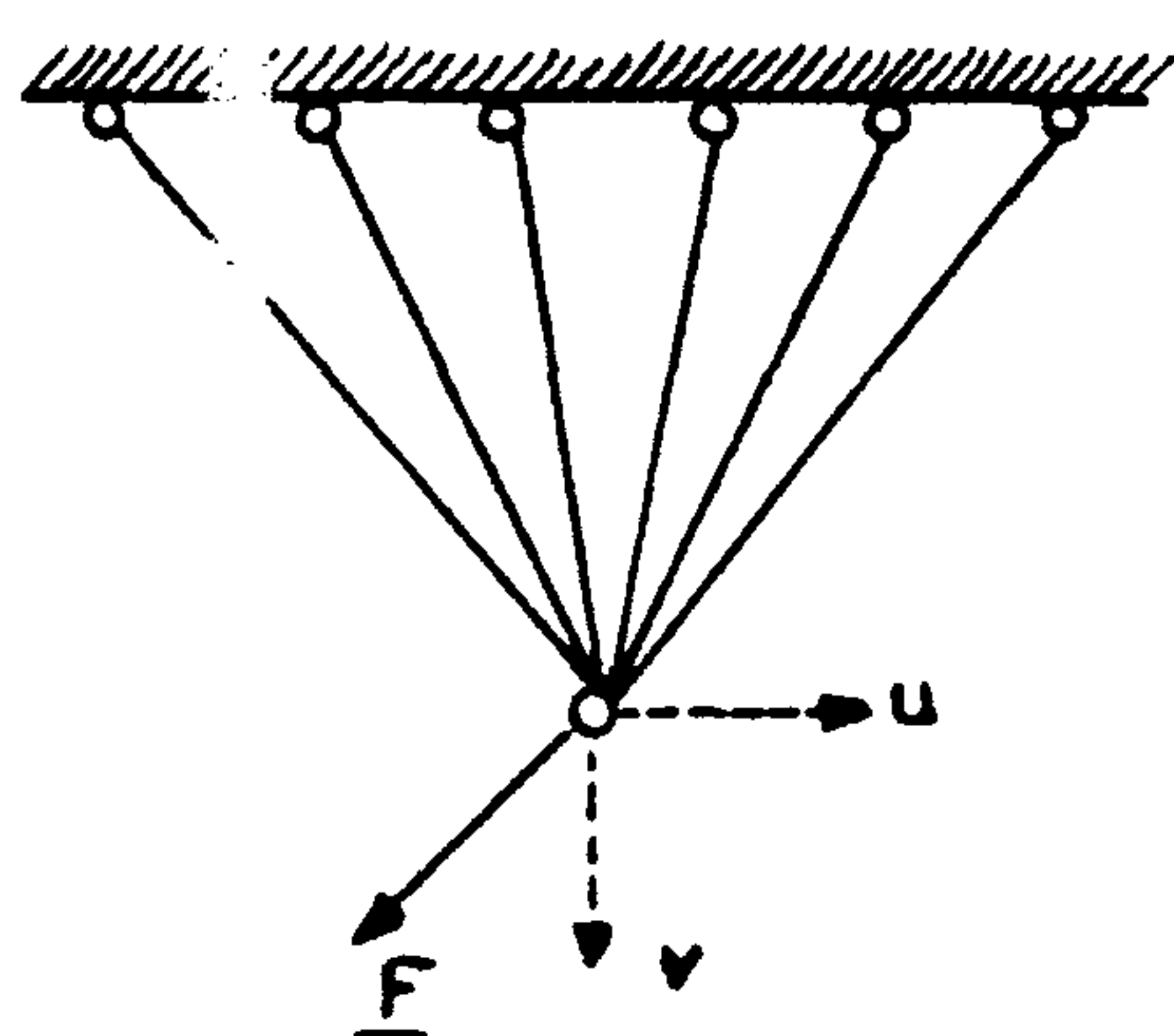
2) Con la ley de comportamiento (Hooke + hipótesis de Navier) se obtiene

$$d\varphi = \frac{M_f}{EI} ds$$



3) Con la congruencia de deformaciones se saca el movimiento vertical del extremo $v = \int d\varphi \cdot x$ y con la compatibilidad de movimientos ($v = 0$) la ecuación que determina R.

Esquema alternativo.



1) Con la compatibilidad de movimientos se obtienen las deformaciones de todas las barras en función de u_1 y v .

2) Con la ley de comportamiento se ponen los esfuerzos en función de las deformaciones ($N_i = AE \varepsilon_i$), y por tanto en función de u, v

3) Con el equilibrio del nudo ($\underline{F} = \Sigma \underline{N}$) se obtienen las ecuaciones necesarias para determinar u y v .

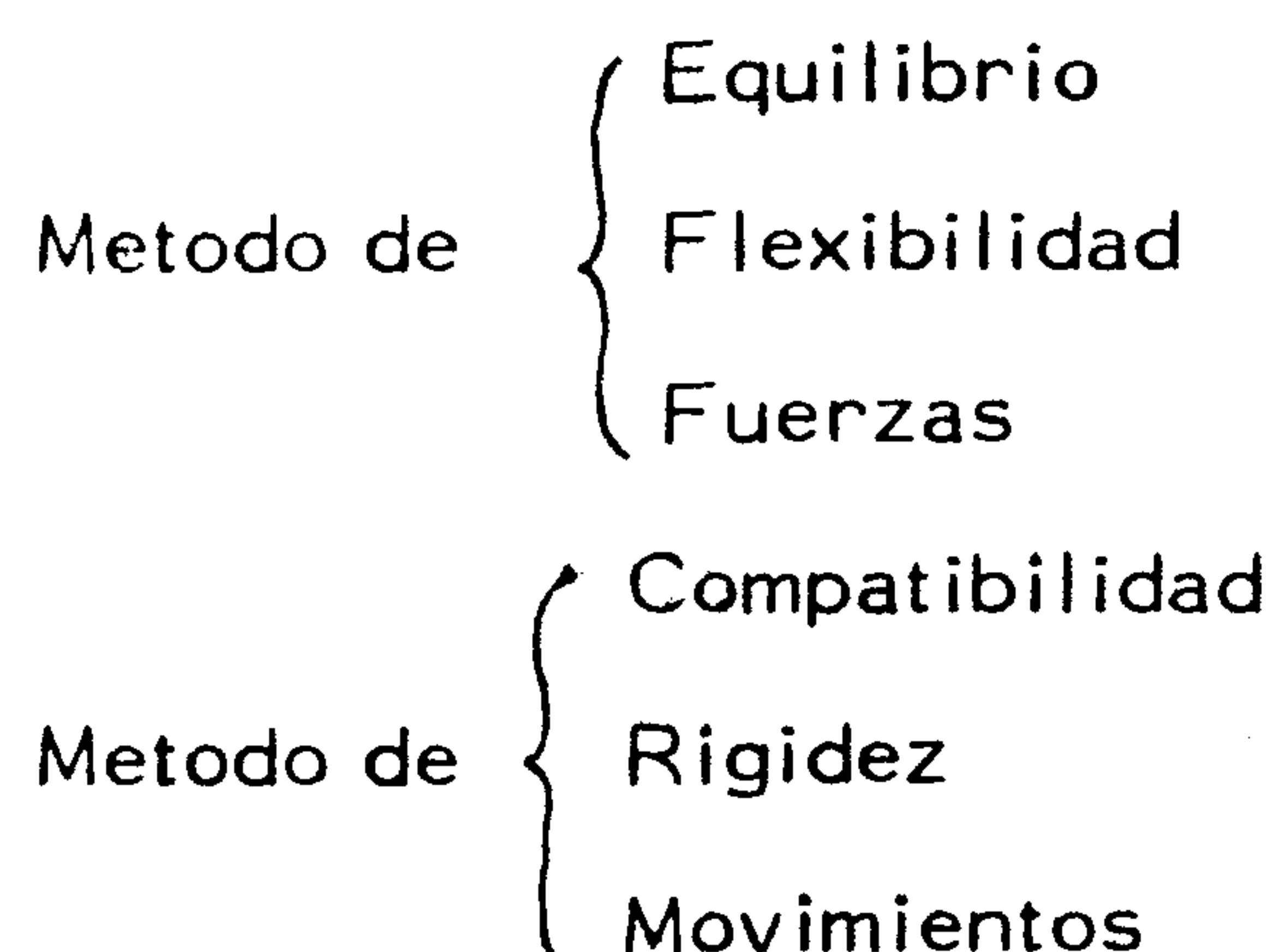
{ En el primer método el orden es
En el segundo

Equil. \rightarrow Comp \rightarrow Compat.

Compat. \rightarrow Comp \rightarrow Equil.

{ En el 1º las incógnitas son fuerzas
En el 2º movimientos

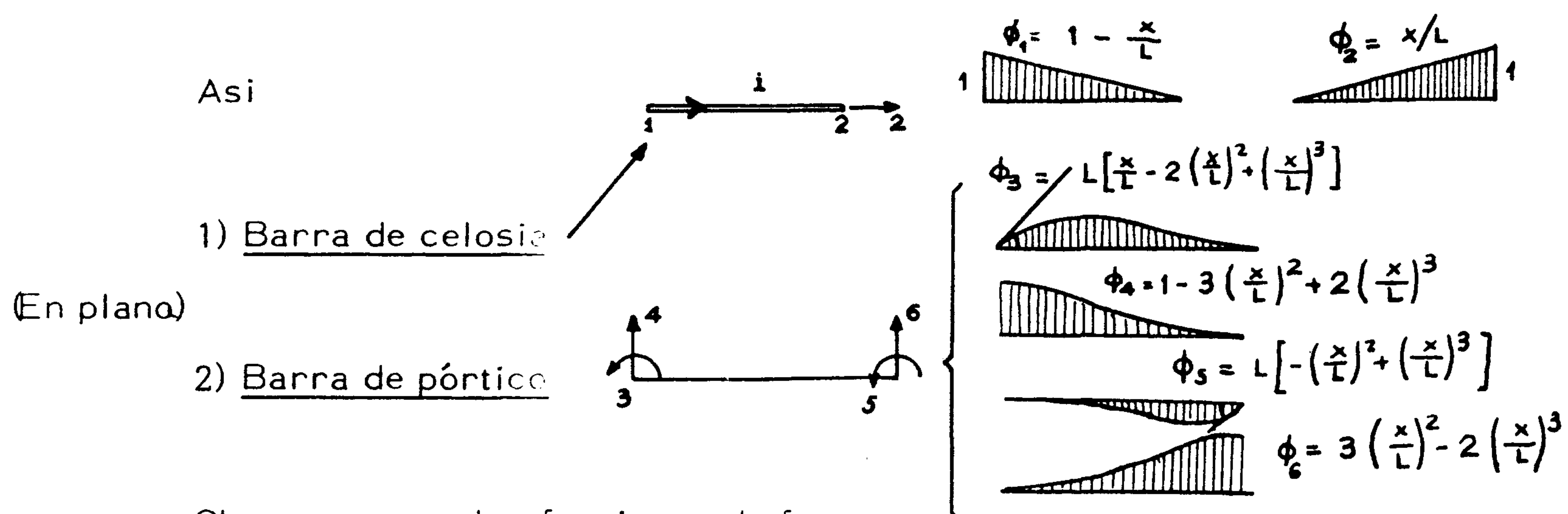
Los nombres respectivos son



Nos vamos a concentrar en el segundo.

1.1 Reducción del continuo a discreto.

En estructuras de barras el elemento obvio es la barra, odos sus extremos, variables nodales esfuerzos y movimientos en los extremos (a nivel elemental) y fuerzas y movimientos de los nodos (a nivel global). Como funciones de forma las dictadas por la resistencia de materiales.



Observese que las funciones de forma representan los movimientos dentro del elemento cuando se dan alternativamente valores unidad a ciertos mo-

vimientos nodales manteniendo nulos los demás. Las formas Φ se determinan de acuerdo con la R. de Materiales, es decir sólo son exactas si se admite la hipótesis de Navier, la no participación del deslizamiento γ en las deformaciones, etc.

Desde la filosofía del F.E.M. las Φ ni son exactas ni dejan de serlo, forman un conjunto de funciones con las - que se pretende aproximar (mediante combinación lineal) el comportamiento real del material.

Punto a meditar.

Sesudos varones discuten la validez de un método que "pretende representar el comportamiento de estructuras aplicando las leyes de la R. de materiales a elementos de viga muy cortos (relación $(h/L) < 1/6$) cuando ello es irreal".

Comentarios.

1.2 Definición de un estado elemental mediante la matriz de rigidez.

En el caso de barras el proceso consiste en generalizar la ley de Hooke $P = k \delta$ a otra

$$\begin{array}{l} \underline{P} = \underline{k} \underline{\delta} \\ P_i = k_{ij} \delta_j \end{array}$$

en la que se relacione el vector de movimientos nodales $\underline{\delta}$ con el de cargas nodales \underline{P} , mediante una matriz de rigidez elemen-

tal \underline{k} .

La notación tensorial indica un camino obvio para construir \underline{k} .

Ejemplo

Primera columna \xrightarrow{N} $\xrightarrow{1}$

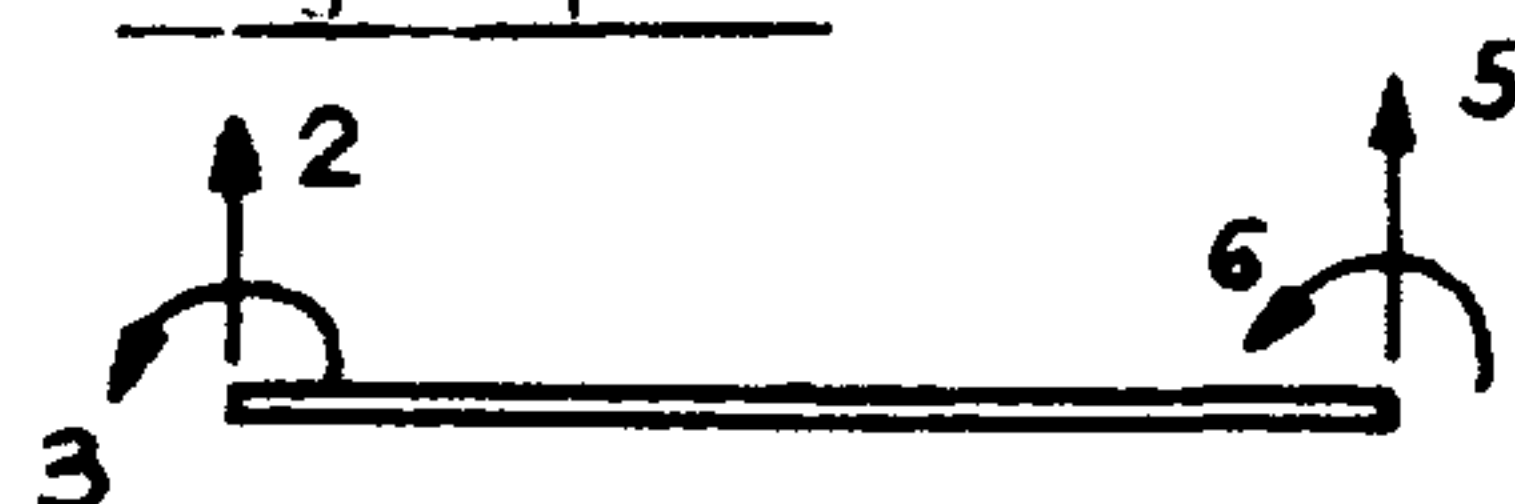
$$L = 1 = \frac{NL}{EA}; N = \frac{EA}{L}; \frac{EA}{L} (1; -1)^T$$

Segunda columna $\xleftarrow{1}$ \xrightarrow{N} $\frac{EA}{L} (-1; 1)^T$

$$\underline{k} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

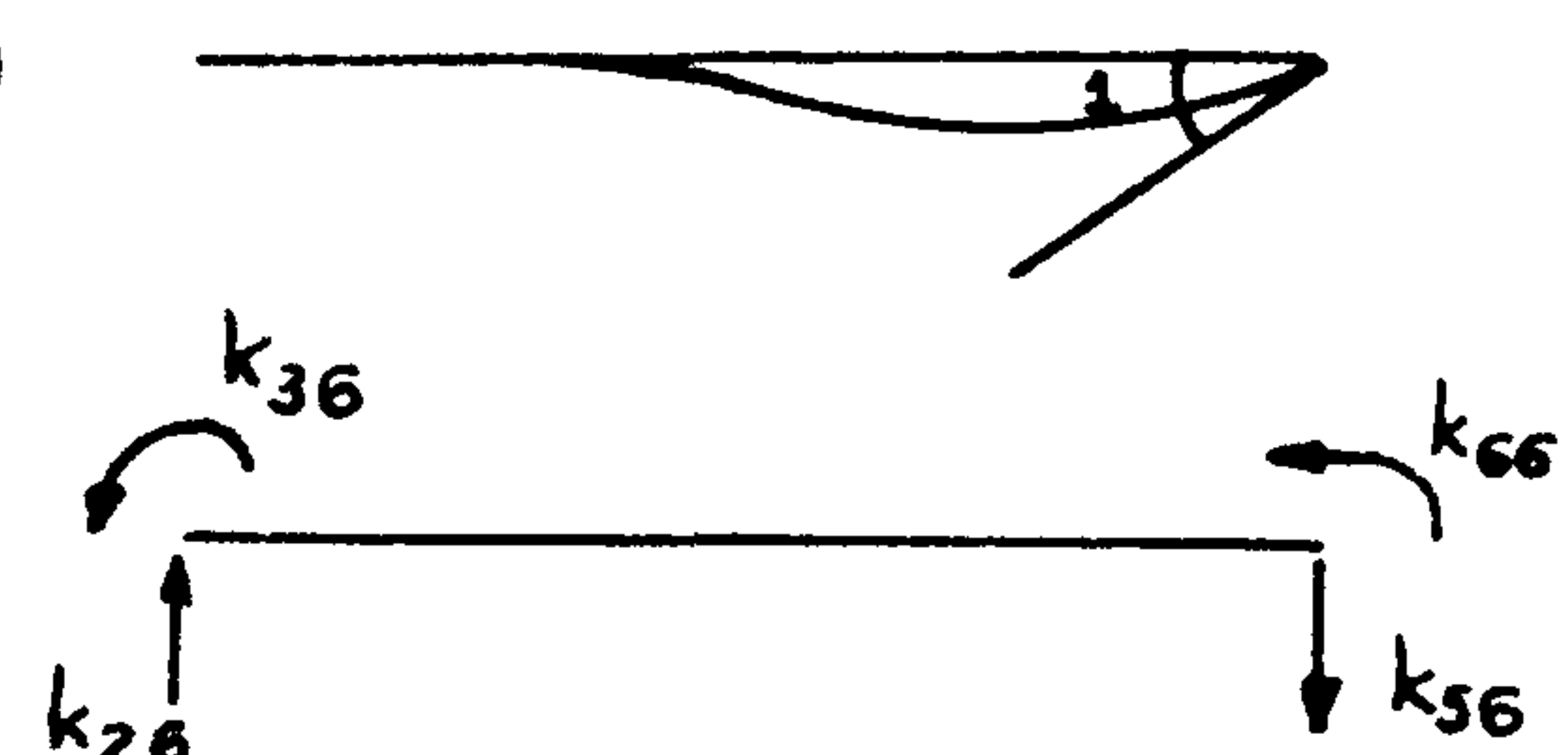
El método mas interesante es la aplicación del teorema de los trabajos virtuales.

Ejemplo

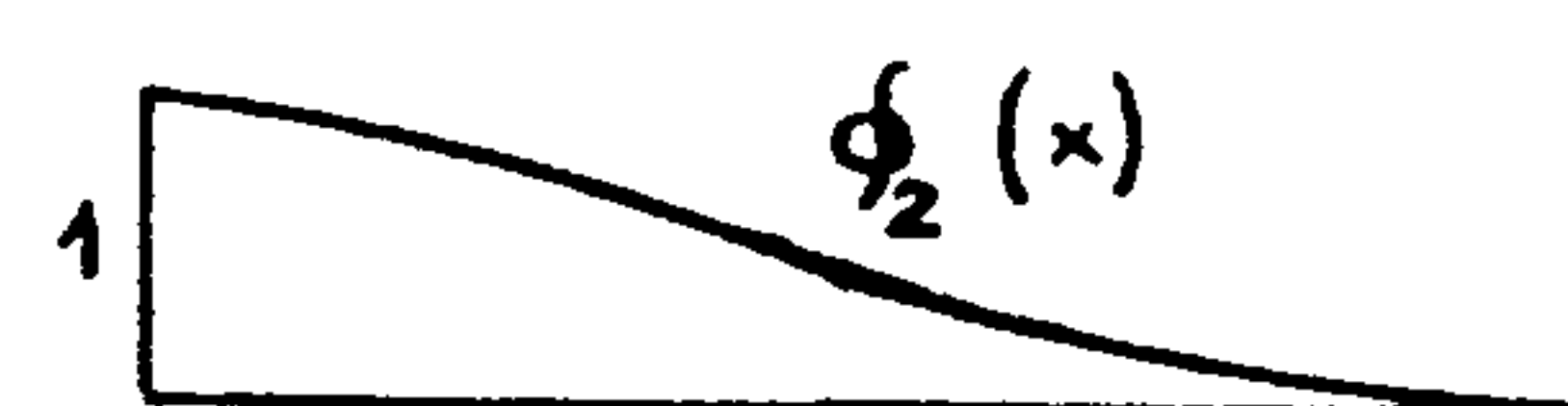


k_{26} : fuerza en 2 cuando a 6 se le dá movimiento a unidad

- 1) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistema de movimientos compatibles } \Phi_6(x) \\ \text{Fuerzas que aparecen al provocar } \Phi_6 \end{array} \right.$



- 2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Se busca una deformada en la que sólo} \\ \text{trabaje } k_{26} : \text{vg.} : \Phi_2 \end{array} \right.$



Momentos flectores

Sistema en equilibrio (k_{26} ; M_f^6) } Trabajos virtuales

Sistema compatible (1 ; X^2) } $1. k_{26} = \int_0^L M_f^6 X^2 dx$ $\left\{ \begin{array}{l} X^2 = \Phi_2'' \\ M_f^6 = EI \Phi_6'' \end{array} \right.$

↑
curvaturas

$$k_{26} = \int \Phi_2'' EI \Phi_6'' dx$$

En general sería

$$k_{ij} = \int \Phi_i'' EI \Phi_j'' dx$$

y si llamamos

$$\underline{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5, \Phi_6)$$

La matriz se obtendría mediante el producto tensorial de los vectores

$$\underline{k} = \int_0^L (\underline{\Phi})^T EI \Phi'' dx$$

(6x6) (6x1) (1x1) (1x6)

Observese que EI es la matriz de rigidez \underline{D} a nivel diferencial (de rebanada) ya que

$$M_f = EI x$$

↑ ↑
"tensiones" "deformaciones"

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$$

1x1 1x1 1x1

Las Φ'' por otro lado relacionan "deformaciones" X con "movimientos" nodales. En efecto

$$y = \Phi_1 \delta_1 + \Phi_2 \delta_2 + \dots + \Phi_6 \delta_6 =$$

$$= (\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \dots \quad \Phi_6) \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \end{Bmatrix}$$

$$X = y'' = (\Phi_1'' \quad \Phi_2'' \quad \dots \quad \Phi_6'') \begin{Bmatrix} \delta \\ \delta \\ \delta \end{Bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ccc} \underline{\varepsilon} & = & \underline{B} \quad \underline{\delta}^e \\ 1 \times 1 & & 1 \times 6 \quad 6 \times 1 \end{array}}$$

Con esta notación, que procuraremos respetar a lo largo de las notas

$$\boxed{\underline{k} = \int_D \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dv}$$

que veremos es válida en general.

Si se realiza el esquema en



se obtiene

$$k = EI/L^3 \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad \text{sim}$$

Punto a meditar

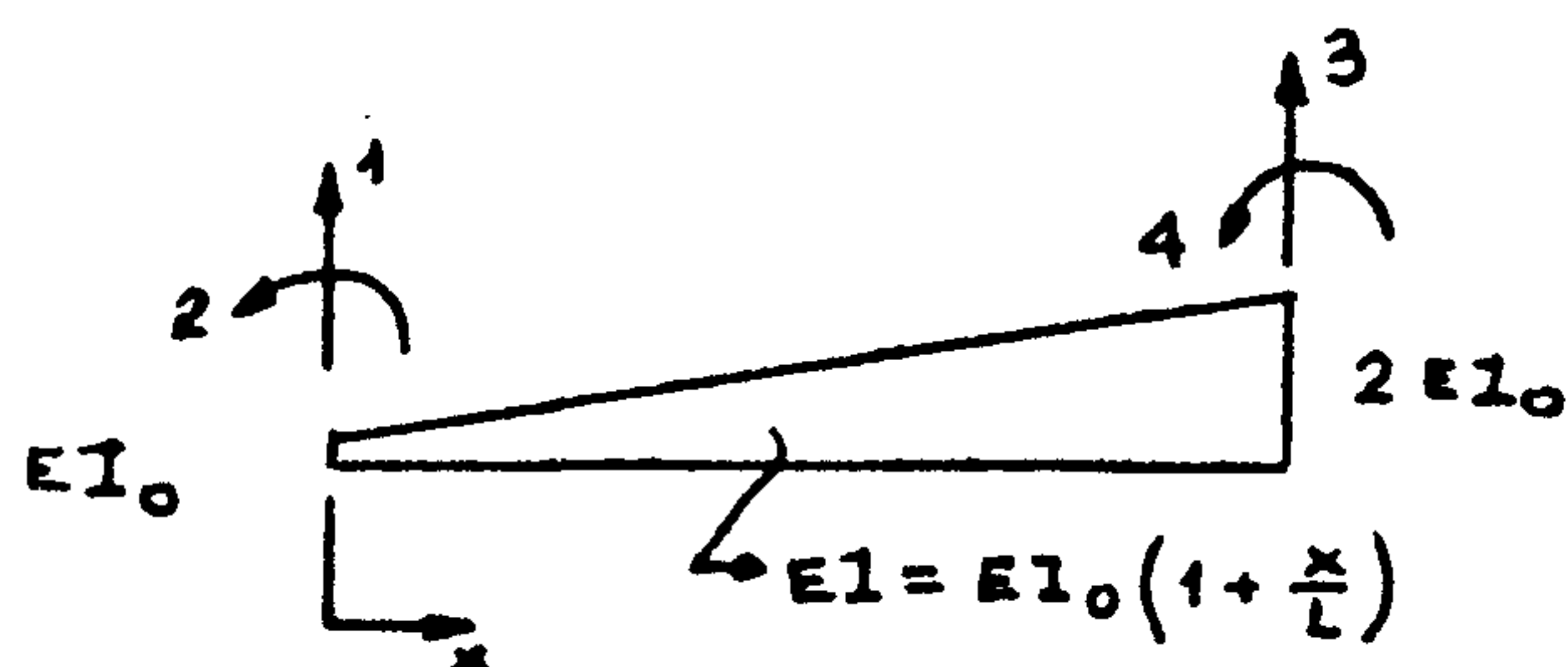
1) Los elementos de la diagonal principal son positivos. La matriz es simétrica.

¿Es posible un elemento negativo en la diagonal principal?

(Caso del pandeo).

2) ¿Cómo modificar la definición de Φ_i para no mezclar nodos axiales con normales.?

Ejercicio



Demost~~ra~~ar que en la barra de la figura, las funciones de forma anteriores conducen a la matriz de rigidez

$$K = \frac{EI_0}{L^3} \begin{bmatrix} 18 & 8L & -18 & 10L \\ 8L & 5L^2 & -8L & 3L^2 \\ -18 & -8L & 18 & -10L \\ 10L & 3L^2 & -10L & 7L^2 \end{bmatrix} \quad \text{sim}$$

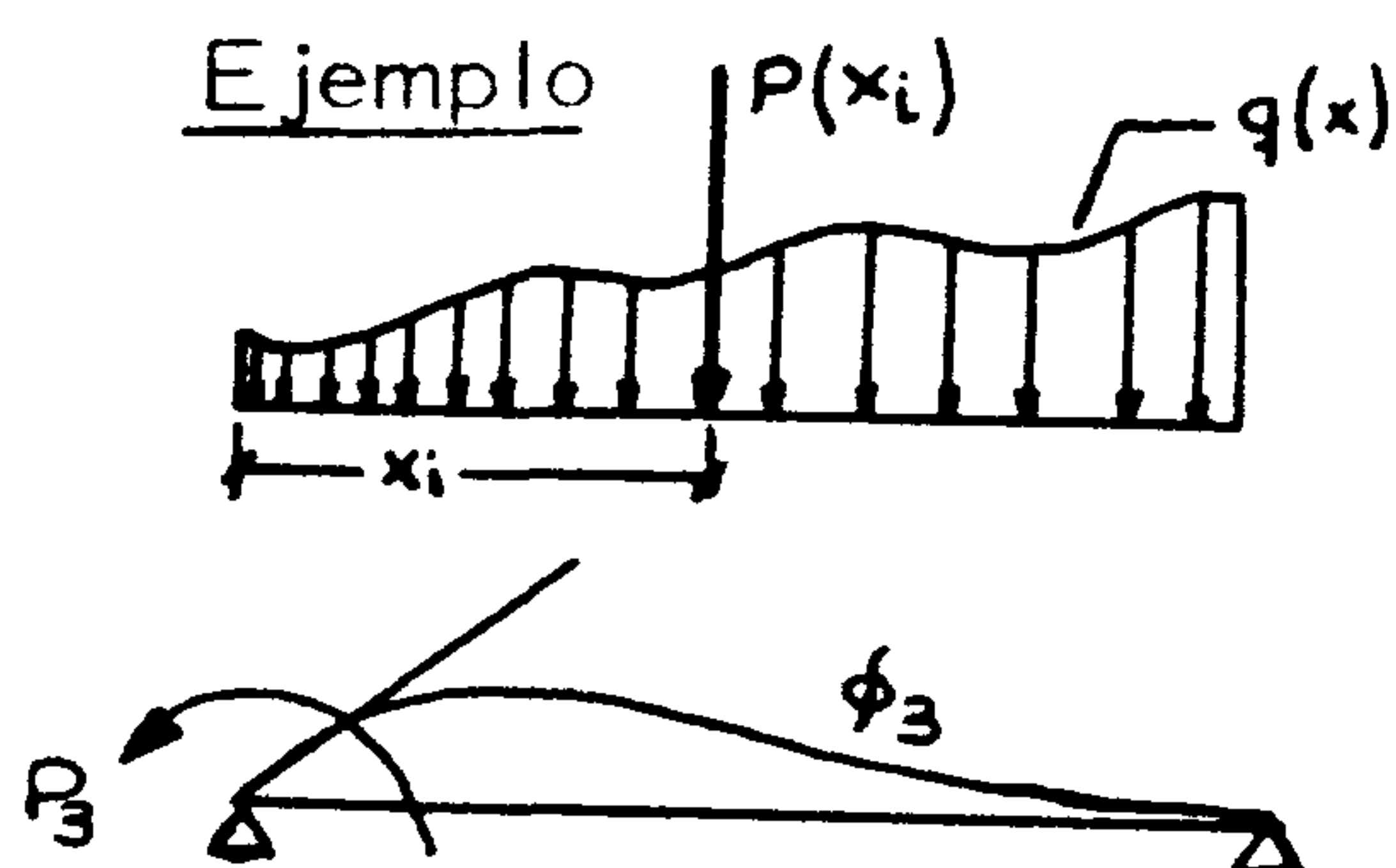
Si se calcula la matriz de rigidez "exacta" según la R. de Materiales se obtiene :

$$k = \frac{EI_0}{L^3} \begin{bmatrix} 17,24 & 7,63L & -17,24 & 9,62L \\ 7,63L & 4,82L^2 & -7,63L & 2,81L^2 \\ -17,24 & -7,63L & 17,24 & -9,62L \\ 9,62L & 2,81L^2 & -9,62L & 6,8L^2 \end{bmatrix}$$

Comentarios.

El método anterior permite obtener cargas nodales equivalentes a cargas que actúen dentro del elemento.

Ejemplo



Se aplica el teorema de los trabajos virtuales de modo que las cargas equivalentes provoquen el mismo trabajo de las cargas interiores.

Por ejemplo.

$$P_3 \cdot 1 = - \int_0^L [q(x) + P \delta(x-x_i)] \Phi_3(x) dx$$

$$P_3 = - \int_0^L q(x) \cdot \Phi_3(x) dx - P \Phi_3(x_i)$$

En general

$$P_i = - \int \Phi_i q dx$$

ó bien

$$\underline{P} = - \int (\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_6)^T q dx$$

$$\underline{P} = - \int_D \underline{N}^T \underline{b} dv$$

6x1

6x1

1x1

donde \underline{N} es la relación entre movimientos de campo y movimientos nodales

$$\begin{aligned} y &= \Phi_1 \delta_1 + \Phi_2 \delta_2 + \dots + \Phi_6 \delta_6 = \\ &= (\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_6) \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$y = \underline{N} \underline{\delta}^e$$

\underline{P} se denomina vector de cargas consistente

Sabiendo como determinar un vector de -
cargas consistente ARCHER (1964) sugirió cómo obtener una matriz
de masa consistente.

Como

$$\underline{F} = \underline{m} \underline{a}$$

$$F_i = m_{ij} a_j$$

cabe interpretar las masas como fuerzas en i cuando en j se dá ace
leración unidad manteniendo cero las demás.

Pero si

$$y = \Phi_1 \delta_1 + \dots + \Phi_6 \delta_6$$

$$\ddot{y} = \Phi_1 \ddot{\delta}_1 + \dots + \Phi_6 \ddot{\delta}_6$$

Quando a j se dá aceleración $\ddot{\delta}_j = 1$ y las demás
 $\ddot{\delta} = 0$

$$\ddot{y}(x) = \Phi_j(x)$$

La carga por unidad de longitud seria

$$q = -Q \Phi_j'$$

Q = masa por unidad de long.

y, mediante el formulismo anterior

$$m_j = \int \Phi_i \underline{Q} \Phi_j dx$$

$$\begin{matrix} \underline{m} & = & \int \underline{\Phi}^T & \underline{Q} & \underline{\Phi} & dx \\ 6 \times 6 & & 6 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 6 & \end{matrix}$$

ó bien, en general

$$\underline{m} = \int_D \underline{N}^T \underline{Q} \underline{N} dv$$

Punto a meditar

¿Qué representa la matriz de masa concéntrada intuitivamente?.

Ejercicio

Demostrar que la matriz de amortiguamiento consistente es

$$\underline{c} = \int_D \underline{N}^T \underline{\mu} \underline{N} dv$$

1.3. Método de síntesis de propiedades generales : Método directo de la rigidez.

La idea matriz del método directo consiste en pensar que la "resistencia" total de la estructura es la suma de las "resistencias" de sus barras o elementos. Si la "resistencia" se define mediante unas relaciones

$$\underline{P}^e = \underline{k}^e \underline{\delta}^e \text{ (a nivel global)}$$

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{U} \text{ (a nivel global)}$$

donde el superíndice indica elemento, la "suma de resistencias" no es mas que el establecimiento de las condiciones de equilibrio.

En efecto, para cada nudo i al que acuden n barras

$$\underline{F}_i - \sum_{l=1}^n \underline{P}_i^e = 0$$

es decir

$$\underline{F}_i = \sum_{l=1}^n \underline{P}_i^e$$

donde \underline{P}_i^e son los esfuerzos en el elemento e que se relacionan con el nudo i . Si los tamaños de los vectores y matrices se amplían al de toda la estructura (orlando con ceros los nudos no afectados por cada barra), es posible escribir

$$\underline{F} = \sum \underline{P}^e = \sum \underline{k}^e \underline{\delta}^e$$

y como, por compatibilidad $\underline{\delta}^e \equiv \underline{u}$

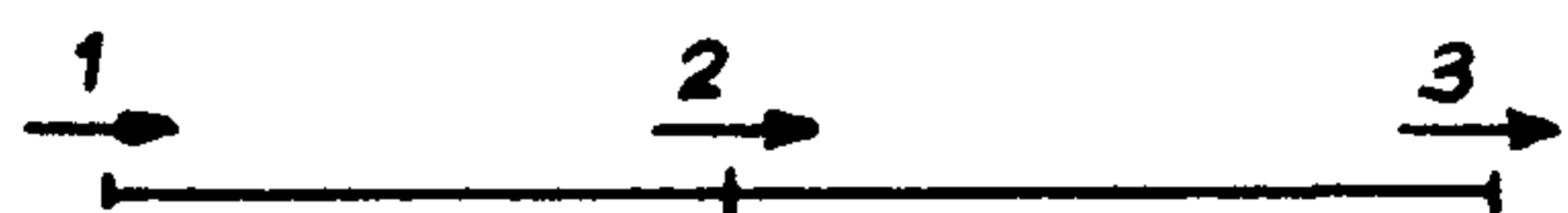
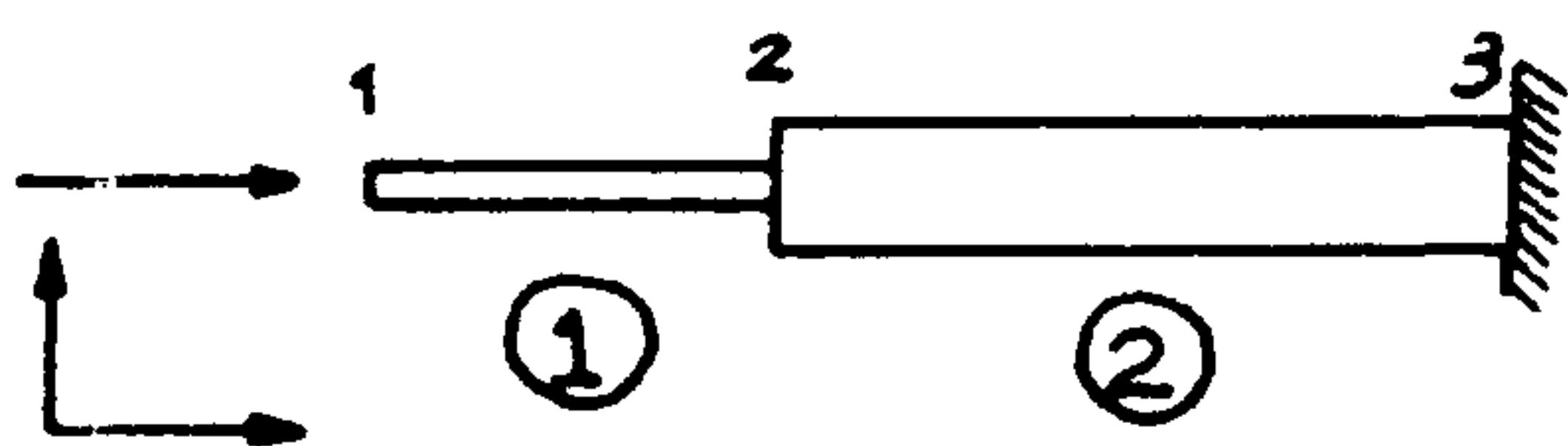
$$\underline{F} = (\sum \underline{k}^e) \underline{u}$$

Es decir, la matriz de rigidez global $\underline{K} = \sum \underline{k}^e$ se obtiene como suma de las matrices elementales siempre que estas

- a) esten referidas a los ejes globales
- b) sean del tamaño general de la estructura.

El paso a) se consigue mediante un giro y el b) mediante un orlado simbólico. Veamos dos ejemplos que aclaran ambos puntos.

Ejemplo 1º



En la barra de la figura se toman los elementos ① y ②
nodos 1, 2 y 3.

La orientación de los ejes locales coincide con los globales de modo que sólo se precisa la operación b).

En efecto la relación global sería

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \underline{K}_{(3 \times 3)} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix}$$

y las elementales serían del tipo

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}^e = \frac{E^e A^e}{L^e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}^e$$

Para el elemento ①

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}^{①} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}^{①}$$

Para el elemento ②

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}^{②} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}^{②}$$

Para llevar las matrices al tamaño adecuado,
basta identificar

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv P_1^{①} & F_2 &\equiv P_2^{①} \equiv P_1^{②} & F_3 &\equiv P_2^{②} \\ u_1 &\equiv \delta_1^{①} & u_2 &\equiv \delta_2^{①} \equiv \delta_1^{②} & u_3 &\equiv \delta_2^{②} \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} P_1^{①} \\ P_2^{①} \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix};$$

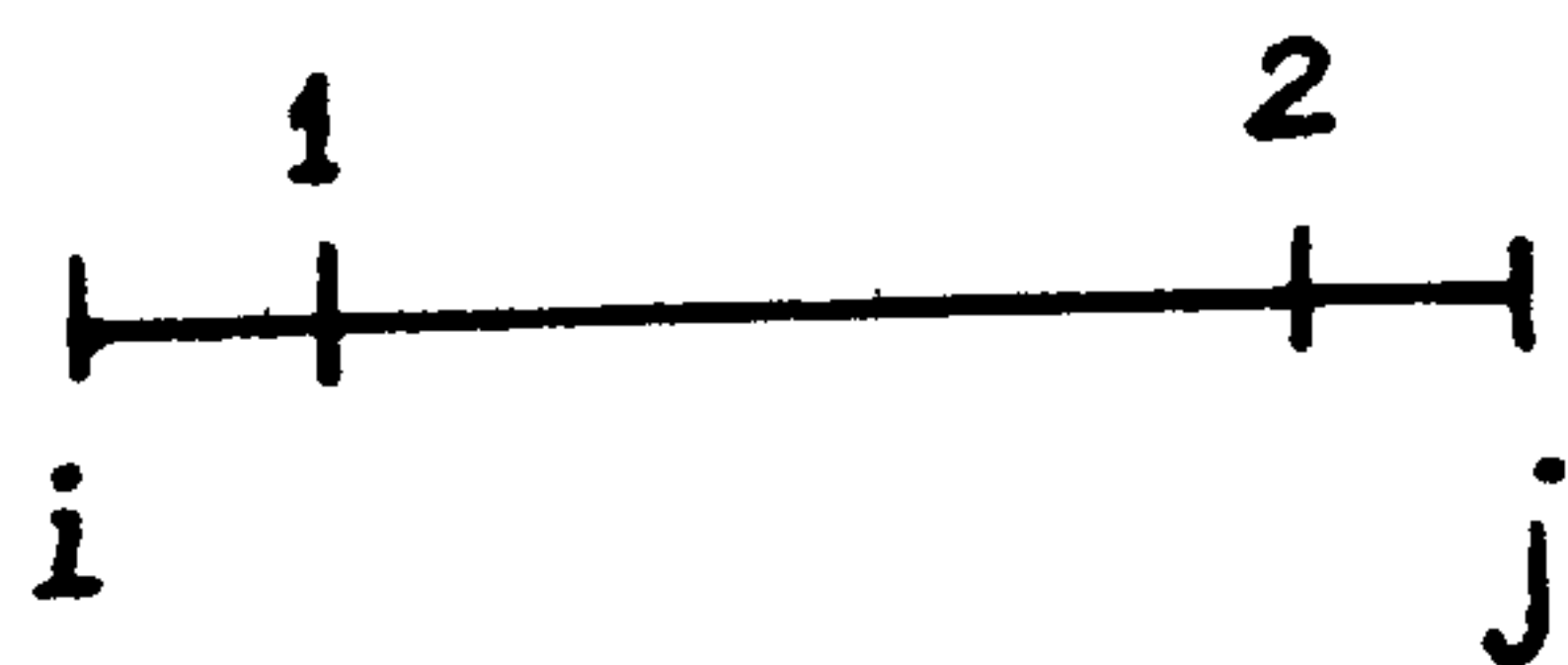
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Con lo que todas las matrices son de tamaño adecuado a la suma.

Realizándola (equilibrio)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} + P_1^{(2)} \\ P_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{E_1 A_1}{L_1} & \frac{E_1 A_1}{L_1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{L_2} & -\frac{E_2 A_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{L_2} & \frac{E_2 A_2}{L_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

El esquema de montaje es el siguiente

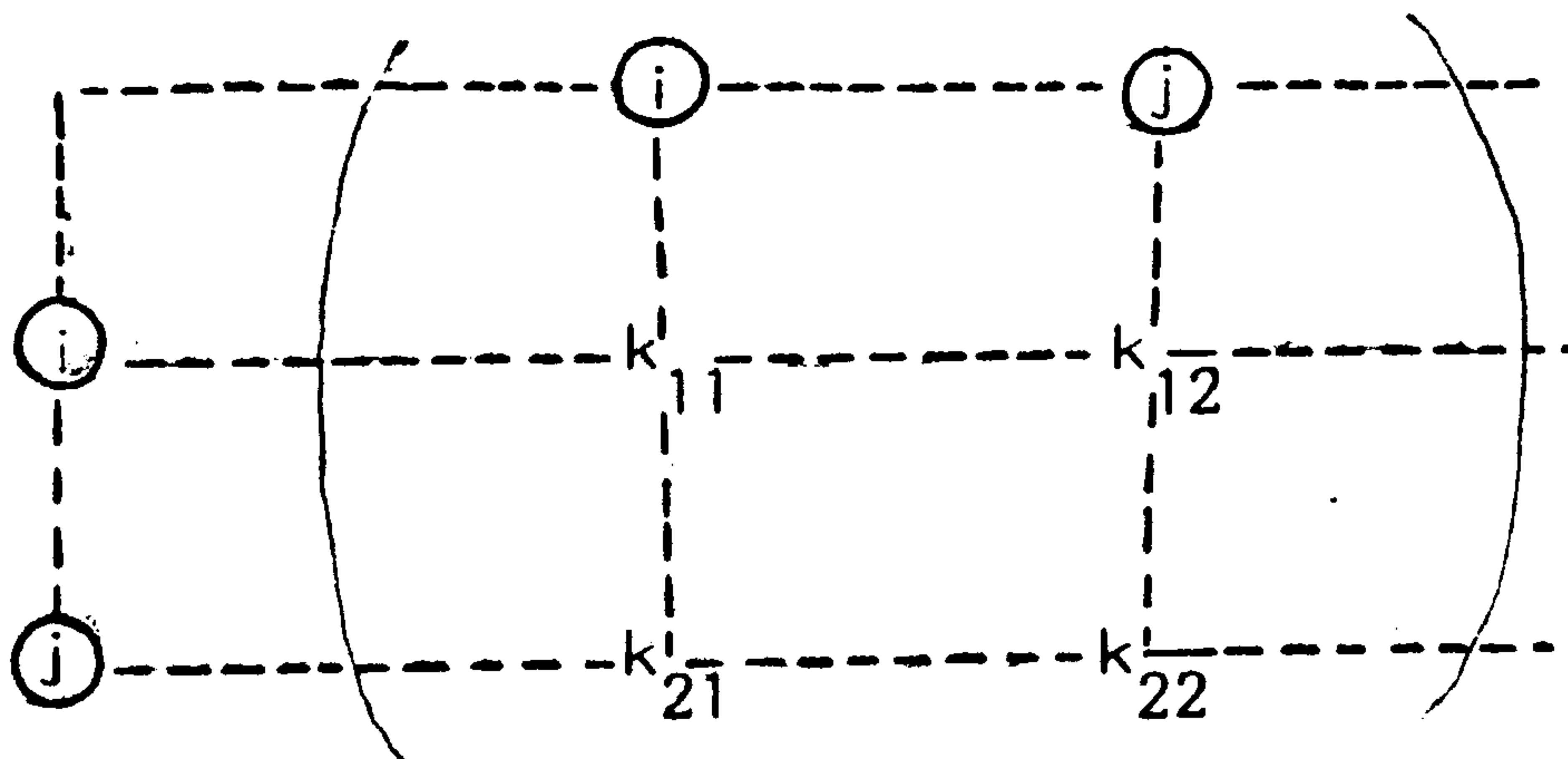


Supongamos que una barra va del nudo i al nudo j (en numeración global) y que sus extremos son 1, 2 en (numeración local).

La matriz de rigidez elemental seria

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

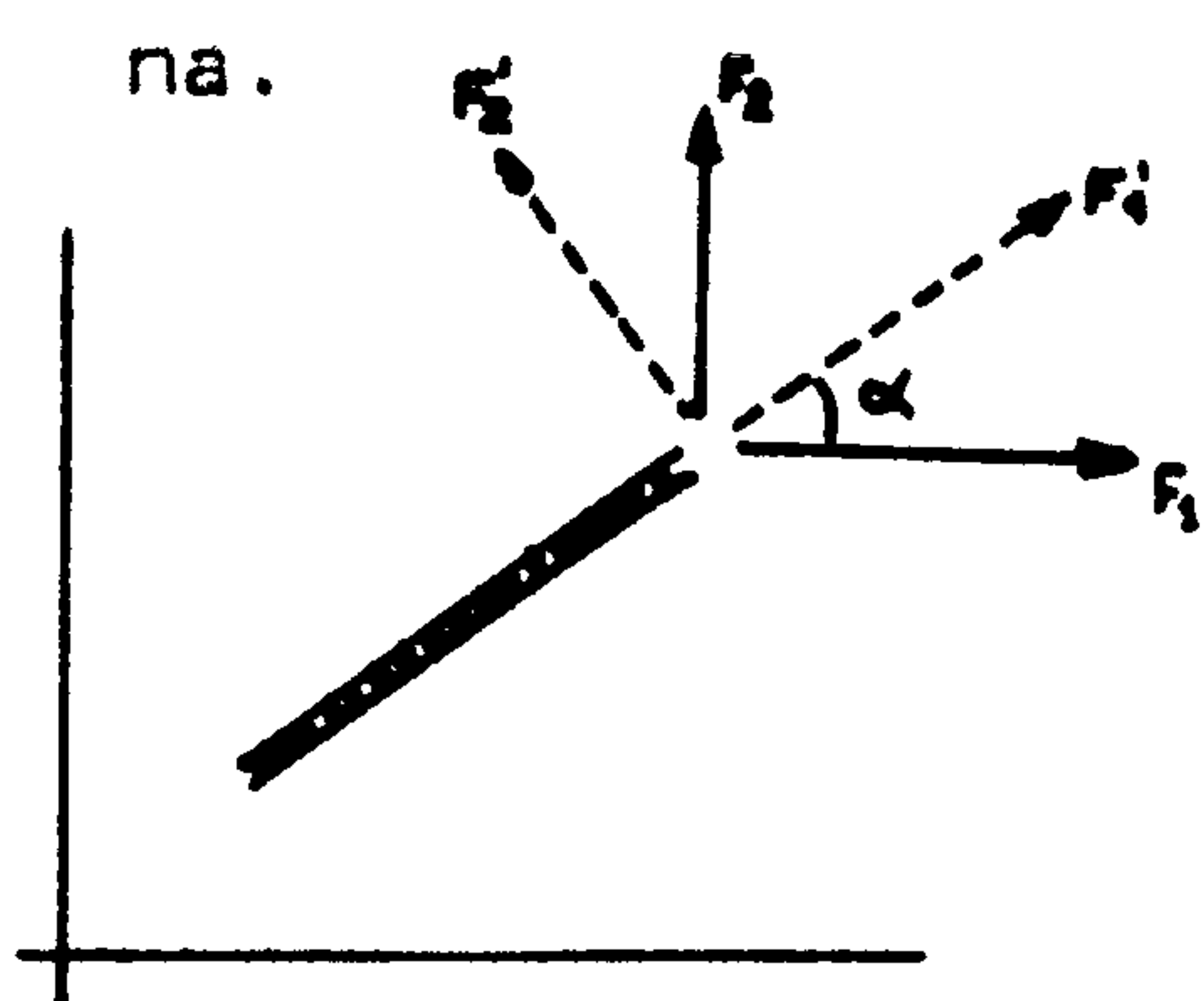
y sus elementos se colocarían en la matriz global según el esquema



Ejemplo 2º

Este ejemplo, algo mas tedioso de operar, presenta una única dificultad adicional, consistente en obtener la matriz de rigidez de una barra en coordenadas globales.

Para ello veamos como se transforman los vectores de cargas y movimientos en un caso muy simple, la barra plana.



Si llamamos

$$\underline{L}_D = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

a la matriz de cosenos directores de una barra orientada y su normal, es evidente que

$$\underline{P}_j = \underline{L}_D \underline{P}'_j$$

$$\underline{\delta}'_j = \underline{L}_D^T \underline{\delta}_j$$

donde j hace referencia al extremo j de la barra.

Reuniendo ambos extremos

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{L}_D & 0 \\ 0 & \underline{L}_D \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P'_i \\ P'_j \end{Bmatrix} = \underline{L} \underline{P}'$$

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} \delta'_i \\ \delta'_j \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{L}_D^T & 0 \\ 0 & \underline{L}_D^T \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \underline{L}^T \underline{\delta}$$

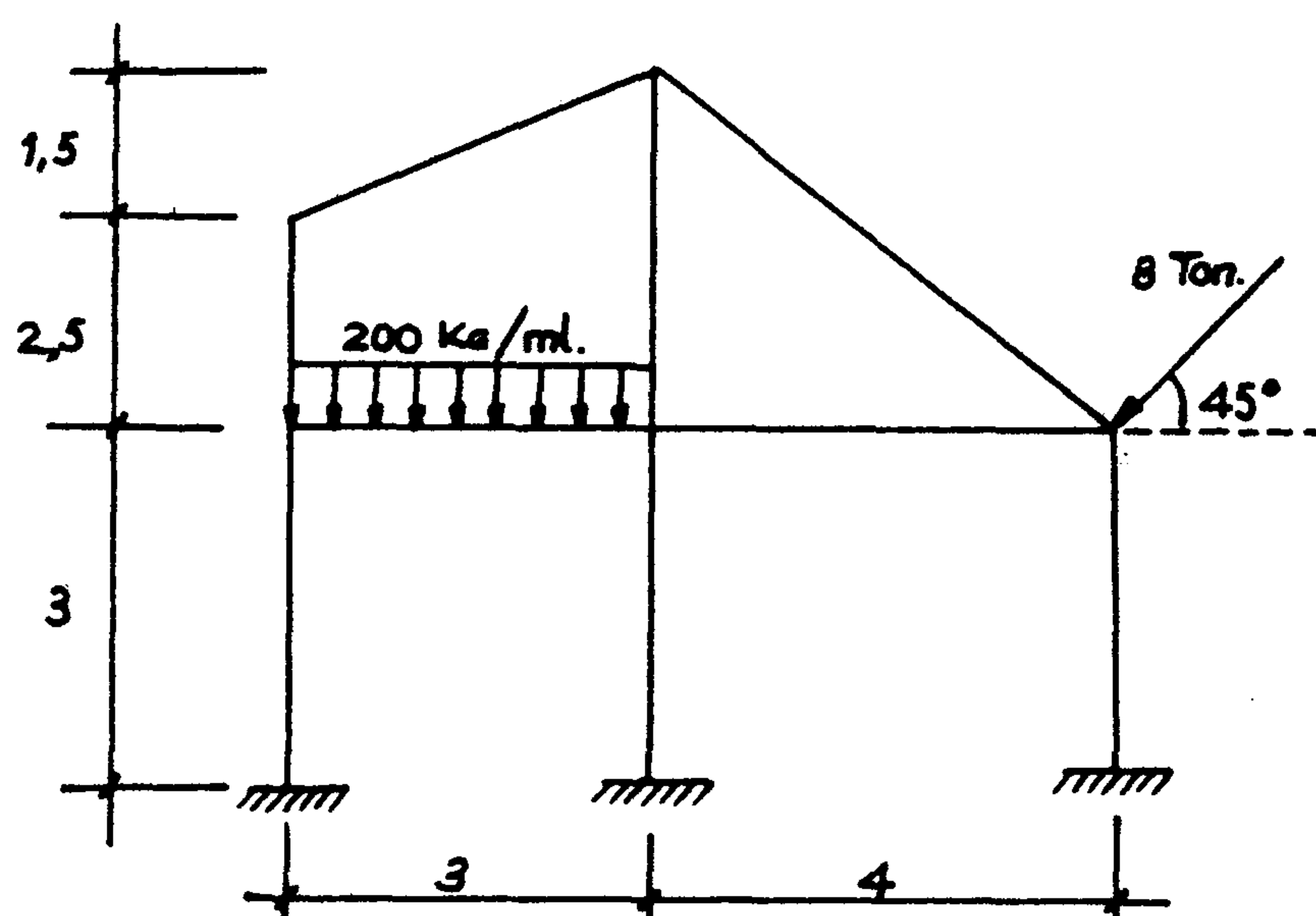
Así pues, como $\underline{P}' = \underline{K}' \underline{\delta}'$ en ejes locales

$$\underline{P} = \underline{L} \underline{P}' = \underline{L} \underline{K}' \underline{\delta}' = (\underline{L} \underline{K}' \underline{L}^T) \underline{\delta}$$


De modo que la matriz de rigidez elemental en coordenadas globales es

$$\underline{k} = \underline{L} \underline{k}' \underline{L}^T$$

El ejemplo propuesto es el siguiente



$$E = 2 \times 10^5 \text{ Kg/cm}^2$$

 30 x 30 cm

PRIMERA NUMERACION

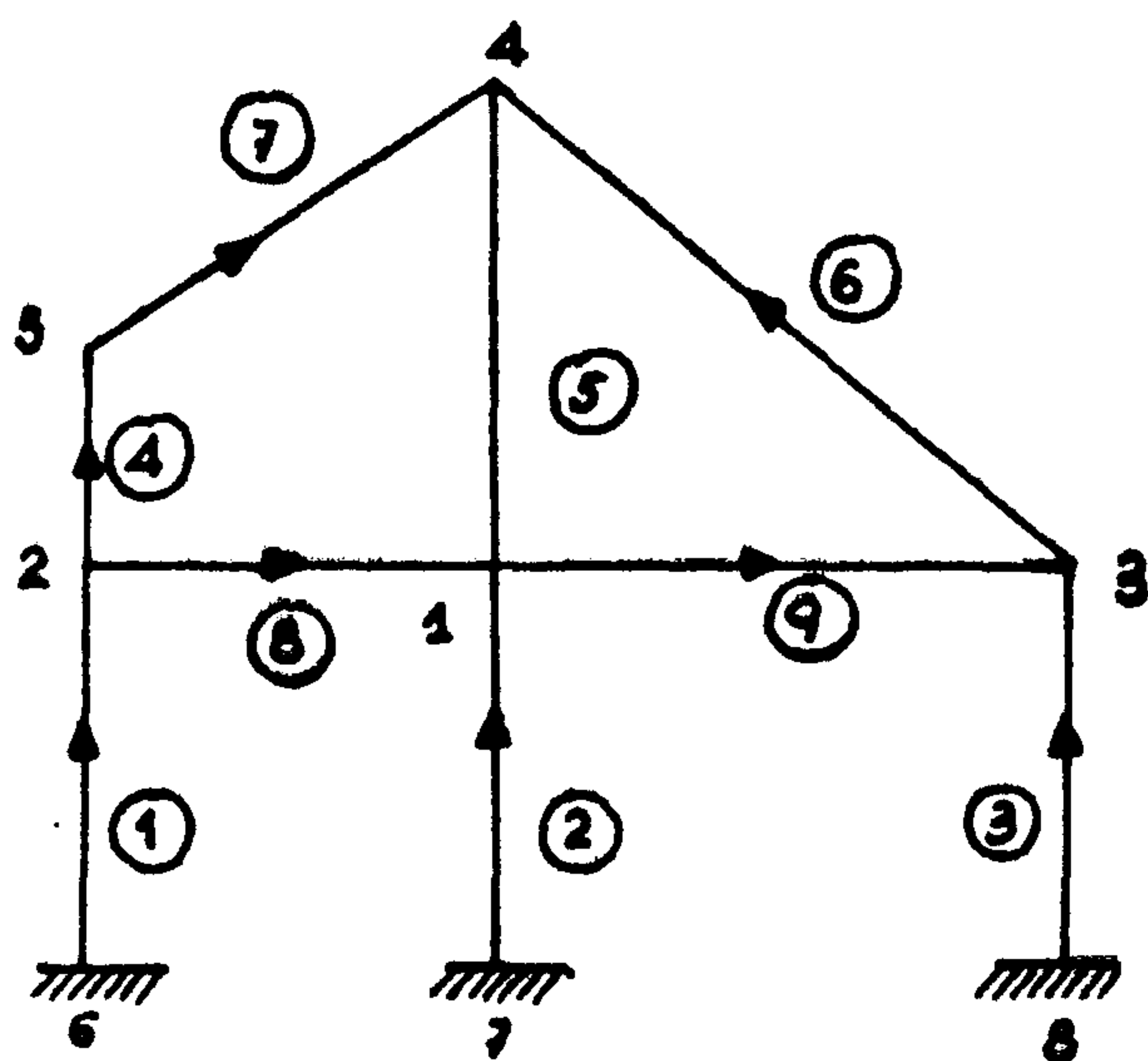


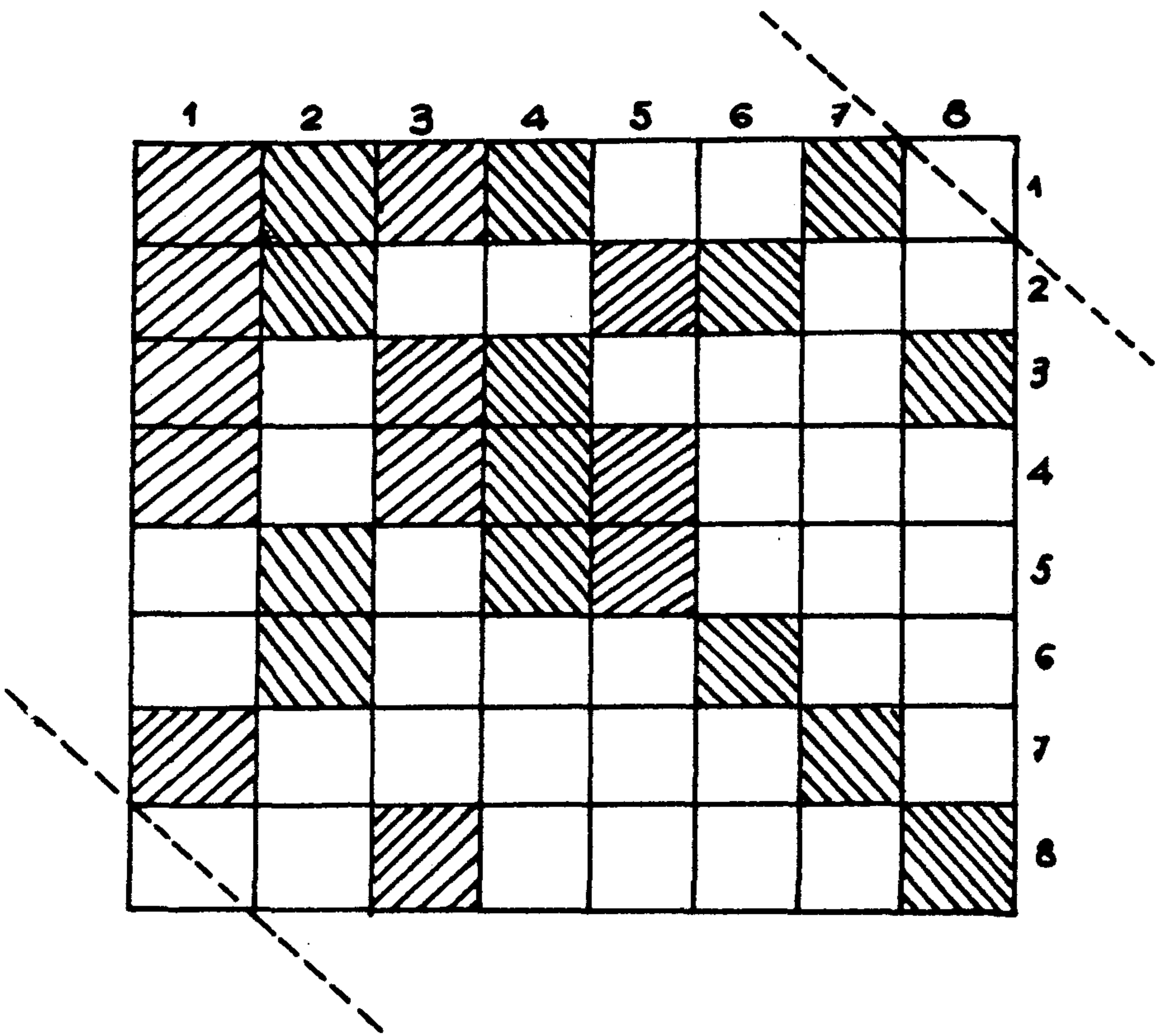
TABLA DE CONECTIVIDAD

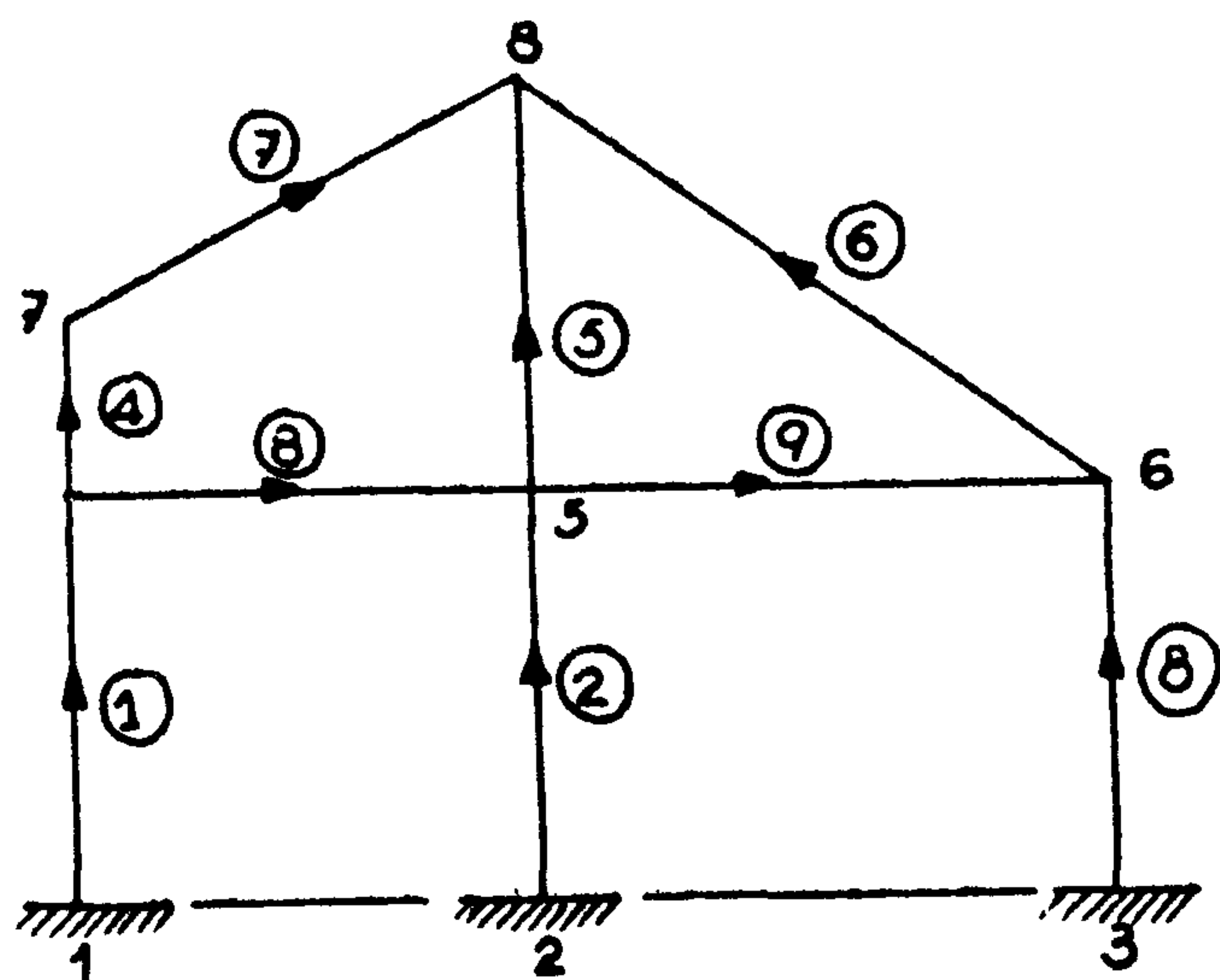
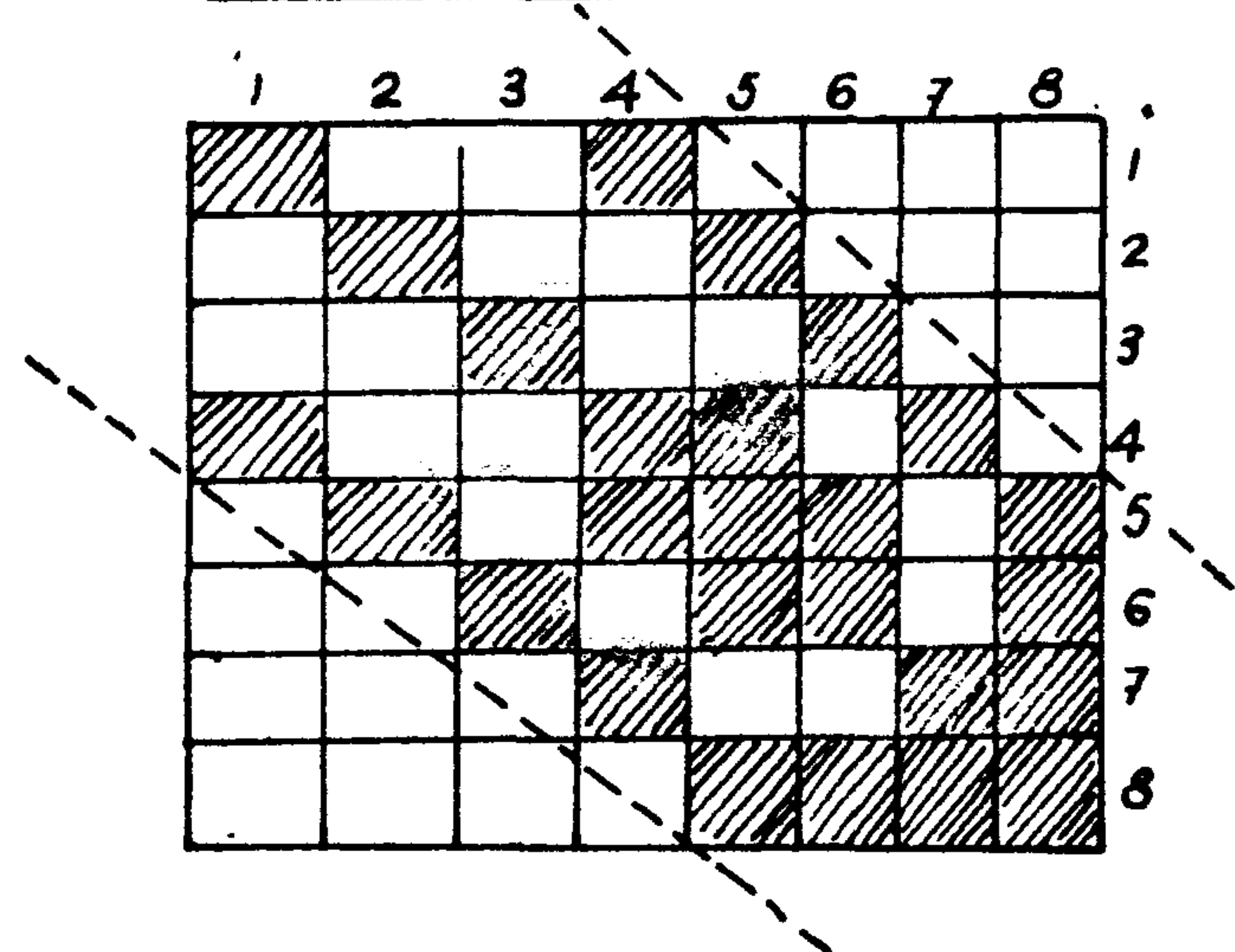
BARRA Nº	EXTREMO	EXTREMO	DIF
	1	2	
1	6	2	4
2	7	1	6 ←
3	8	3	5
4	2	5	3
5	1	4	3
6	4	3	1
7	5	4	1
8	2	1	1
9	1	3	2

COORDENADAS NODALES

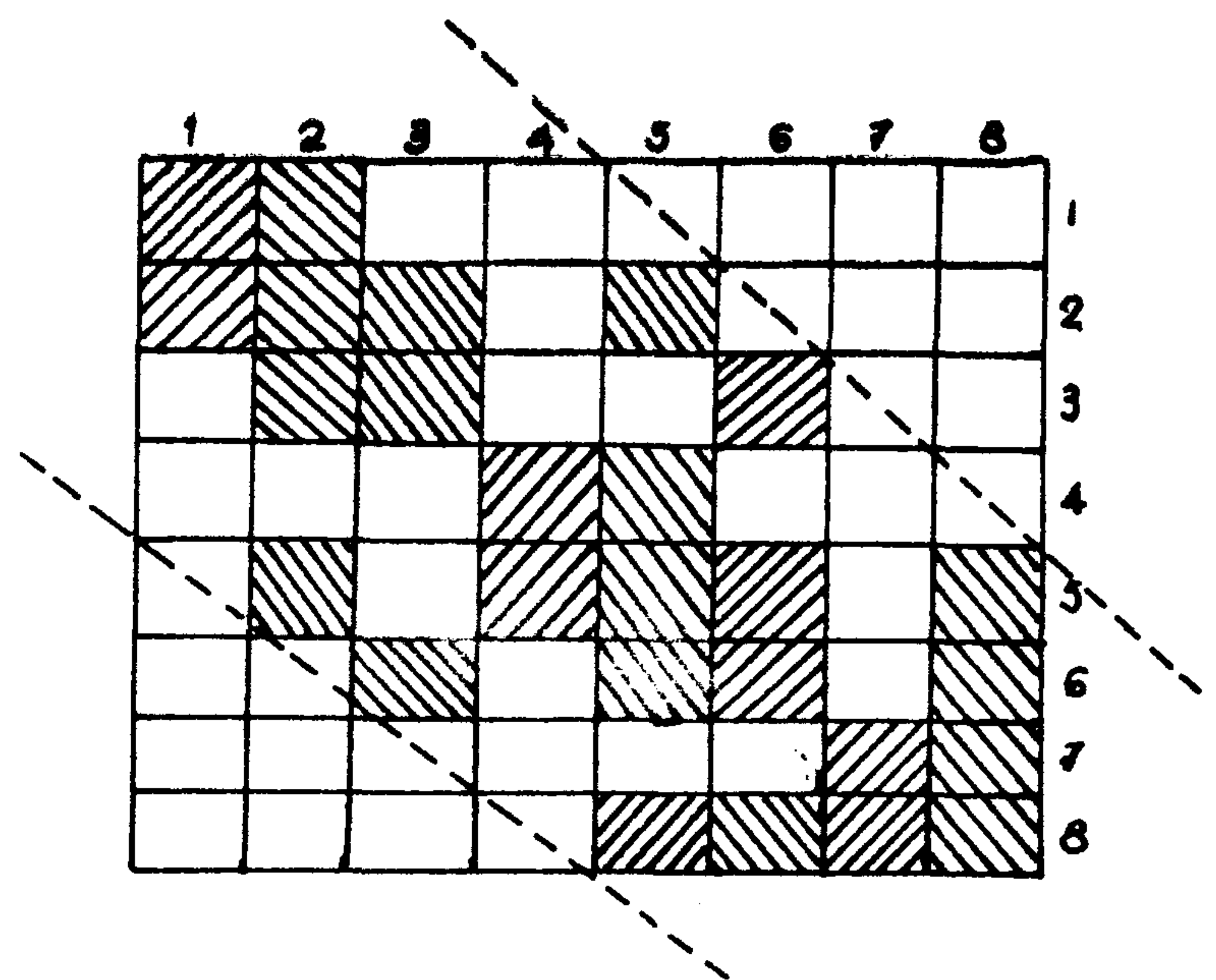
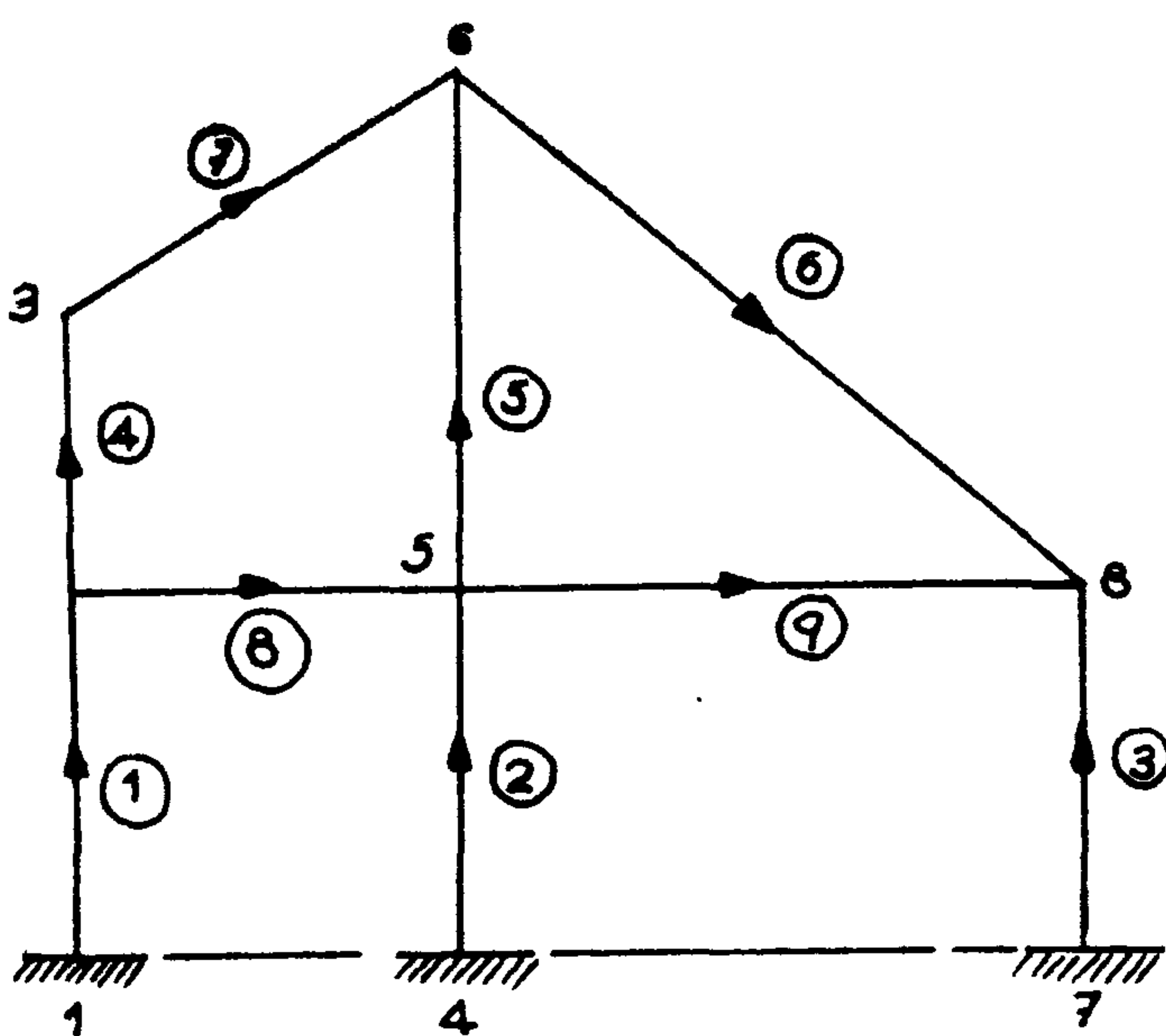
NUDO Nº	X	Y
1	3	3
2	0	3
3	7	3
4	3	7
5	0	5,5
6	0	0
7	3	0
8	7	0

ESTRUCTURA DE K



SEGUNDA NUMERACIONESTRUCTURA DE K

Esta segunda numeración es más ventajosa, ya que produce un ancho de banda inferior.

TERCERA NUMERACION

El ancho de banda se mantiene y la forma es más irregular que la numeración por filas, de modo que escogemos - la segunda numeración.

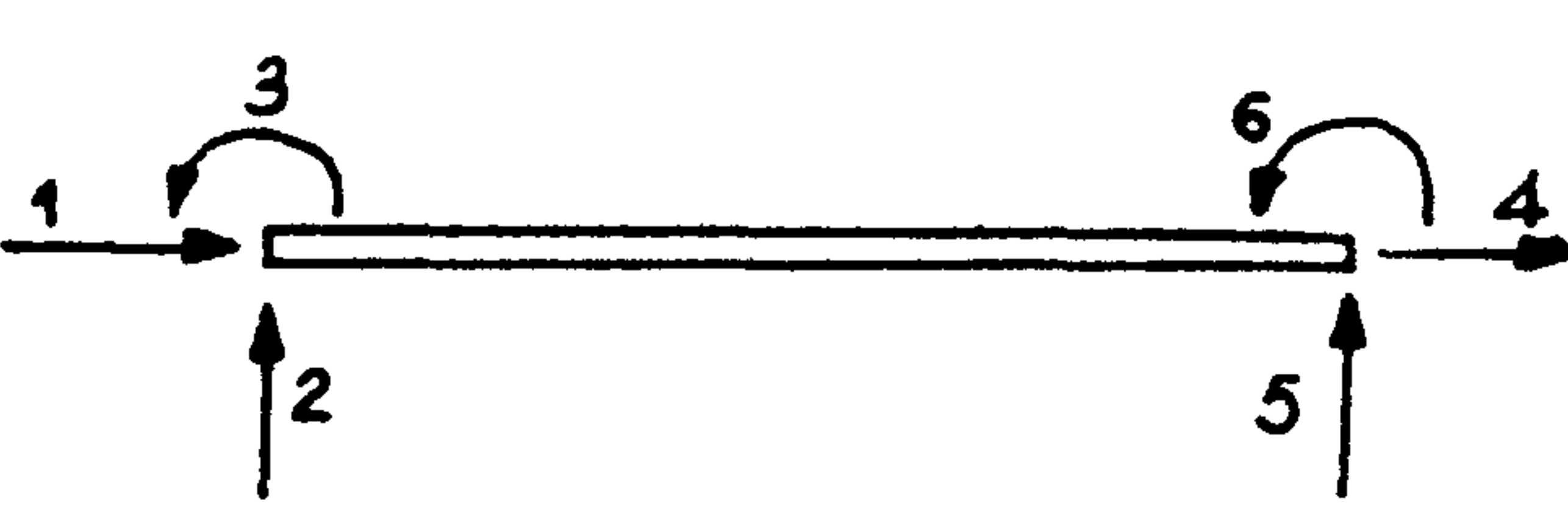
SEGUNDA NUMERACION

TABLA DE CONECTIVIDAD

COORDENADAS NODALES

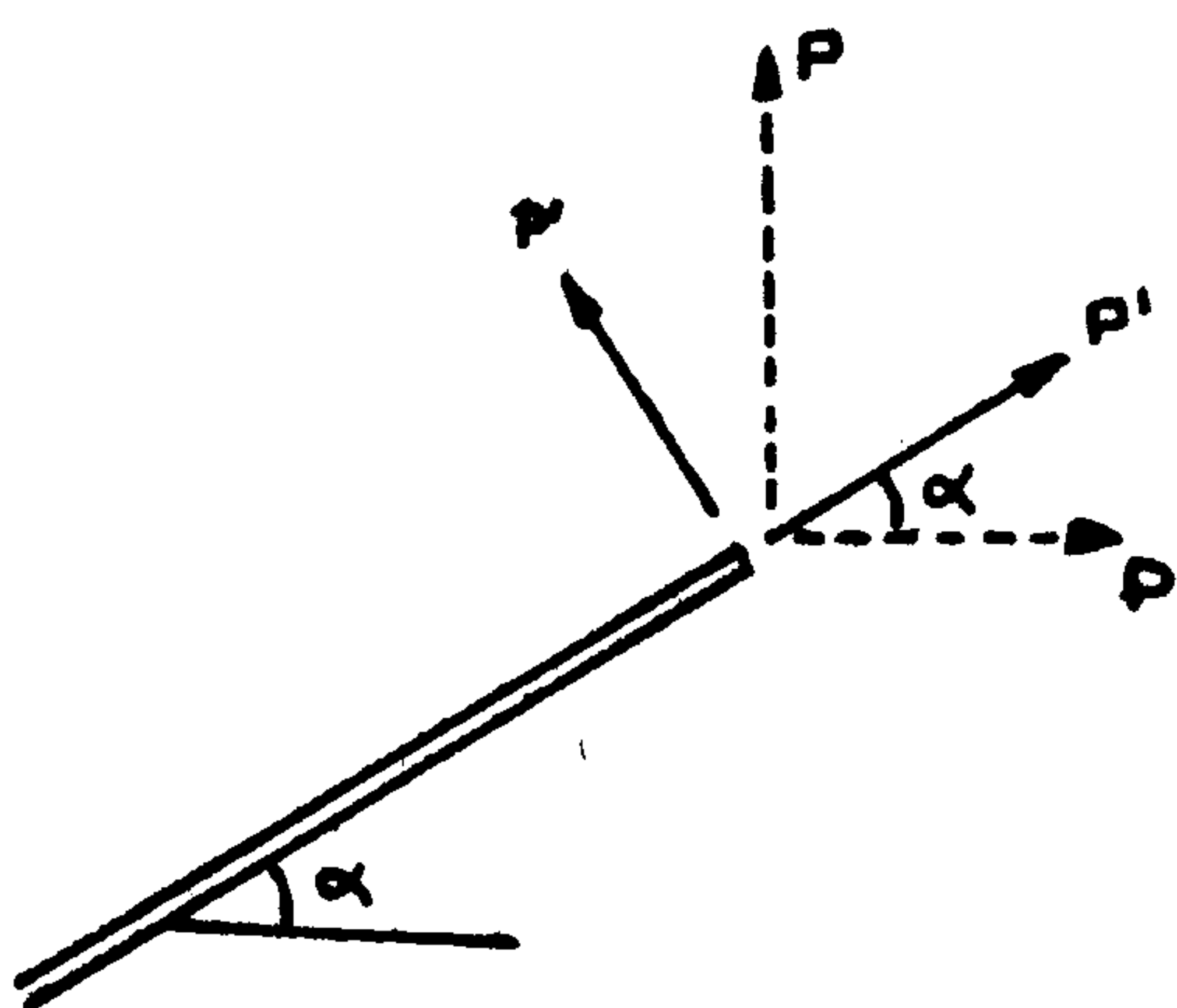
<u>BARRA</u>	<u>EXTR.1</u>	<u>EXTR.2</u>	<u>DIF</u>	<u>NUDO</u>	<u>X</u>	<u>Y</u>
1	1	4	3 ←	1	0	0
2	2	5	3	2	3	0
3	3	6	3	3	7	0
4	4	7	3	4	0	3
5	5	8	3	5	3	3
6	8	6	2	6	7	3
7	7	8	1	7	0	5,5
8	2	5	3	8	3	7
9	5	8	3			

MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAL EN COOR. LOCALES



$k' =$

$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0
0	$12\frac{EI}{L^3}$	$6\frac{EI}{L^3}$	0	$-12\frac{EI}{L^3}$	$6\frac{EI}{L^3}$
0	$6\frac{EI}{L^3}$	$4\frac{EI}{L^2}$	0	$-6\frac{EI}{L^3}$	$2\frac{EI}{L^2}$
$-\frac{EA}{L}$	0	0	EA/L	0	0
0	$-12\frac{EI}{L^3}$	$-6\frac{EI}{L^3}$	0	$12\frac{EI}{L^3}$	$6\frac{EI}{L^3}$
0	$6\frac{EI}{L^3}$	$2\frac{EI}{L^2}$	0	$6\frac{EI}{L^3}$	$4\frac{EI}{L^2}$

MATRIZ GIRO

$$\underline{P}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{P}_1$$

$$\underline{P}'_1 = \underline{L}_D \underline{P}_1$$

$$\underline{P}' = \underline{L} \underline{P} \quad ; \quad \underline{L} = \begin{pmatrix} \underline{L}_D & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_D \end{pmatrix}$$

$$\text{Cuando } \alpha = 90^\circ \quad \begin{cases} \sin \alpha = 1 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\underline{L}_D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Como } \underline{L}^T = \underline{L}^{-1} \quad ; \quad \underline{P} = \underline{L}^T \underline{P}' \quad \left. \begin{matrix} \underline{U}' = \underline{L} \underline{U} \end{matrix} \right\}$$

$$\underline{P} = (\underline{L}^T \underline{k}' \underline{L}) \underline{u}$$

$$\text{Cuando } \alpha = -45^\circ \quad \begin{cases} \sin \alpha = -\sqrt{2}/2 \\ \cos \alpha = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

$$\underline{L}_D = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Cuando } \tan \alpha = 1/2 \quad \begin{cases} \sin \alpha = 1/\sqrt{5} \\ \cos \alpha = 2/\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\underline{L}_D = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

MATRICES DE RIGIDEZ EN COORDENADAS GLOBALES

Barras ⑧ y ⑨ igual que en locales.

Barras ①, ②, ③, ④, ⑤

$$\underline{L} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ +12\frac{IE}{L^3} & 0 & 6\frac{EI}{L^3} & -12\frac{EI}{L^3} & 0 & 6\frac{EI}{L^3} \\ +6\frac{IE}{L^3} & 0 & 4\frac{EI}{L^2} & -6\frac{EI}{L^3} & 0 & 2\frac{EI}{L^2} \\ \hline 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -12\frac{IE}{L^3} & 0 & -6\frac{EI}{L^3} & 12\frac{EI}{L^3} & 0 & 6\frac{EI}{L^3} \\ 6\frac{EI}{L^3} & 0 & 2\frac{EI}{L^2} & 6\frac{EI}{L^3} & 0 & 4\frac{EI}{L^2} \end{array} \right]$$

$\underline{k} =$

$12 \frac{EI}{L^3}$	0	$6 \frac{EI}{L^3}$	$-12 \frac{EI}{L^3}$	0	$6 \frac{EI}{L^3}$
0	$\frac{EA}{L}$	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0
$6 \frac{EI}{L^3}$	0	$4 \frac{EI}{L^2}$	$-6 \frac{EI}{L^3}$	0	$2 \frac{EI}{L^2}$
$-12 \frac{EI}{L^3}$	0	$-6 \frac{EI}{L^3}$	$12 \frac{EI}{L^3}$	0	$6 \frac{EI}{L^3}$
0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	$\frac{EA}{L}$	0
$6 \frac{EI}{L^3}$	0	$2 \frac{EI}{L^2}$	$6 \frac{EI}{L^3}$	0	$4 \frac{EI}{L^2}$

Barra nº 6 $\alpha = -45^\circ$

$\underline{k}' \underline{L} =$

$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$	0	$-\frac{EA}{L}$	$-\frac{EA}{L}$	0
$-12 \frac{EI}{L^3}$	$12 \frac{EI}{L^3}$	$\frac{12}{2} \frac{EI}{L^3}$	$12 \frac{EI}{L^3}$	$-12 \frac{EI}{L^3}$	$\frac{12}{2} \frac{EI}{L^3}$
$-6 \frac{EI}{L^3}$	$6 \frac{EI}{L^3}$	$\frac{8}{2} \frac{EI}{L^2}$	$6 \frac{EI}{L^3}$	$-6 \frac{EI}{L^3}$	$\frac{4}{2} \frac{EI}{L^2}$
$-\frac{EA}{L}$	$-\frac{EA}{L}$	0	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}$	0
$-12 \frac{EI}{L^3}$	$-12 \frac{EI}{L^3}$	$-\frac{12}{2} \frac{EI}{L^3}$	$-12 \frac{EI}{L^3}$	$12 \frac{EI}{L^3}$	$\frac{12}{2} \frac{EI}{L^3}$
$-6 \frac{EI}{L^3}$	$6 \frac{EI}{L^3}$	$\frac{4}{2} \frac{EI}{L^2}$	$-6 \frac{EI}{L^3}$	$6 \frac{EI}{L^3}$	$\frac{8}{2} \frac{EI}{L^2}$

$\underline{k} = \frac{1}{2}$

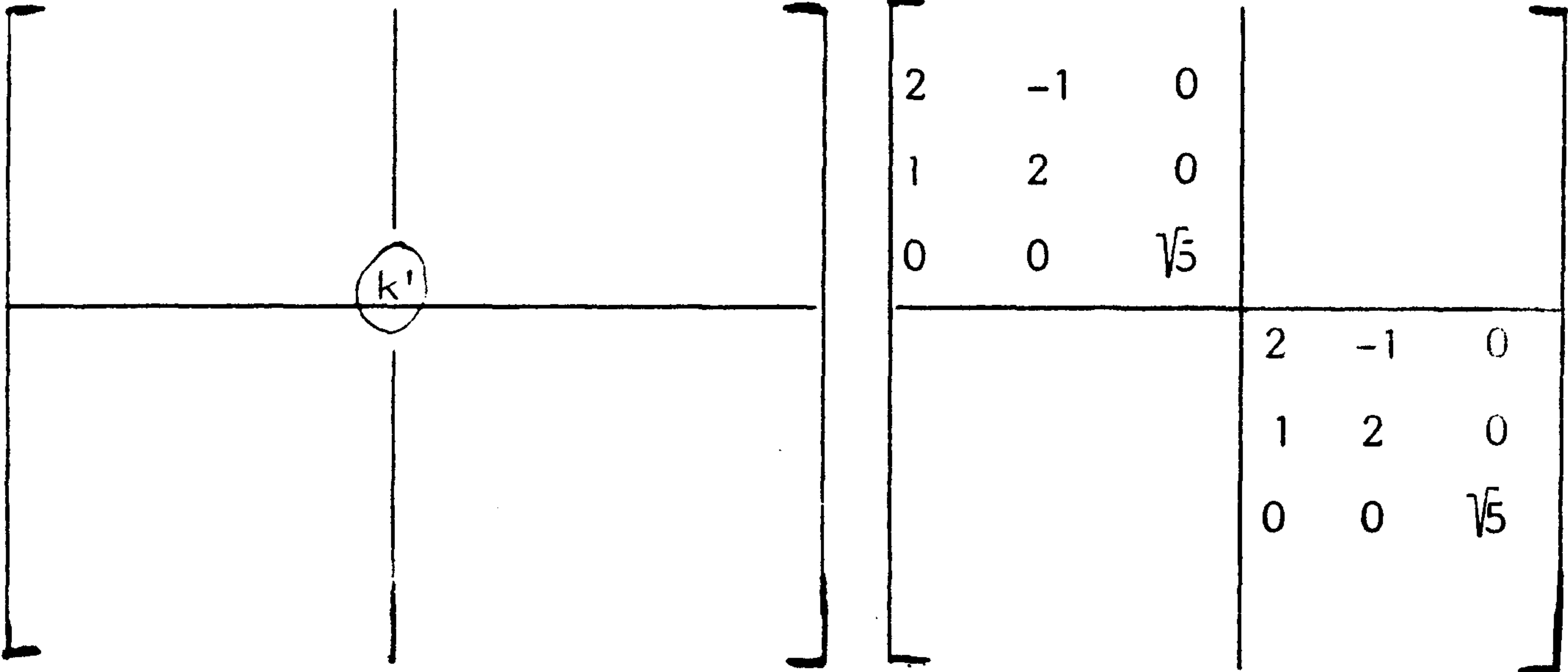
$EA/L +$ $12EI/L^3$	$EA/L -$ $-12EI/L^3$	$-\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$	$-EA/L -$ $-12EI/L^3$	$-EA/L +$ $+12EI/L^3$	$-\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$
$EA/L -$ $-12EI/L^3$	$EA/L +$ $+12EI/L^3$	$\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$	$-EA/L +$ $+12EI/L^3$	$-EA/L -$ $-12EI/L^3$	$\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$
$-\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$	$\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$	$8 \frac{EI}{L^2}$	$\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$	$-\frac{12}{\sqrt{2}} \frac{EI}{L^3}$	$4 \frac{EI}{L^2}$

sim

Barra nº 7

$\tag \alpha = \frac{1}{2} = 0,5 \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \alpha = 0,45 \\ \text{cos } \alpha = 0,89 \end{array} \right.$

$\underline{k'L} = \frac{1}{\sqrt{5}}$



$$\bar{L}^T K \bar{L} = \frac{1}{5}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{EI}{12L^3} & \frac{EI}{24L^3} & \frac{6\sqrt{5}EI}{L^3} & -\frac{EI}{12L^3} & -\frac{EI}{24L^3} & \frac{6\sqrt{5}EI}{L^3} \\ \frac{EI}{6L^3} & \frac{EI}{12L^3} & \frac{4\sqrt{5}EI}{L^2} & -\frac{EI}{6L^3} & -\frac{EI}{12L^3} & \frac{2\sqrt{5}EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{2L} & \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{2L} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EI}{12L^3} & -\frac{EI}{24L^3} & -\frac{6\sqrt{5}EI}{L^3} & \frac{EI}{12L^3} & \frac{EI}{24L^3} & \frac{6\sqrt{5}EI}{L^3} \\ \frac{EI}{6L^3} & \frac{EI}{12L^3} & \frac{2\sqrt{5}EI}{L^2} & -\frac{EI}{6L^3} & -\frac{EI}{12L^3} & \frac{4\sqrt{5}EI}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{1}{5}$$

$4\frac{EA}{L} + 12\frac{EI}{L^3}$	$-2\frac{EA}{L} + 24\frac{EI}{L^3}$	$6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$-4\frac{EA}{L} - 12\frac{EI}{L^3}$	$2\frac{EA}{L} - 24\frac{EI}{L^3}$	$6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$
$-2\frac{EA}{L} + 24\frac{EI}{L^3}$	$\frac{EA}{L} + 48\frac{EI}{L^3}$	$12\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$2\frac{EA}{L} - 24\frac{EI}{L^3}$	$\frac{EA}{L} - 48\frac{EI}{L^3}$	$12\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$
$6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$12\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$20\frac{EI}{L^2}$	$-6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$12\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$10\frac{EI}{L^2}$
$-4\frac{EA}{L} - 12\frac{EI}{L^3}$	$+2\frac{EA}{L} - 24\frac{EI}{L^3}$	$-6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$4\frac{EA}{L} + 12\frac{EI}{L^3}$	$2\frac{EA}{L} + 24\frac{EI}{L^3}$	$6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$
$2\frac{EA}{L} - 24\frac{EI}{L^3}$	$-\frac{EA}{L} - 48\frac{EI}{L^3}$	$-12\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$-2\frac{EA}{L} + 24\frac{EI}{L^3}$	$-\frac{EA}{L} + 48\frac{EI}{L^3}$	$2\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$
$6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$12\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$10\frac{EI}{L^2}$	$6\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$12\sqrt{5}\frac{EI}{L^3}$	$20\frac{EI}{L^2}$

BARRAS ①, ②, ③

$$EI = 2 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{12} \cdot 30^4 = \frac{2 \times 3^4}{12} \cdot 10^9 = 13,5 \cdot 10^9$$

$$EA = 2 \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^2 = 18 \cdot 10^7$$

$$\frac{EI}{L^3} = \frac{13,5 \cdot 10^9}{27 \cdot 10^6} = 500 ; \quad \frac{EA}{L} = \frac{18 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^2} = 6 \cdot 10^5 \quad L = 300$$

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 10^3 & 0 & 3 \cdot 10^3 & -6 \cdot 10^3 & 0 & 3 \cdot 10^3 \\ 0 & 600 \cdot 10^3 & 0 & 0 & -600 \cdot 10^3 & 0 \\ 3 \cdot 10^3 & 0 & 600 \cdot 10^3 & -3 \cdot 10^3 & 0 & 300 \cdot 10^3 \\ -6 \cdot 10^3 & 0 & -3 \cdot 10^3 & 6 \cdot 10^3 & 0 & 3 \cdot 10^3 \\ 0 & -600 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 600 \cdot 10^3 & 0 \\ 3 \cdot 10^3 & 0 & 300 \cdot 10^3 & 3 \cdot 10^3 & 0 & 600 \cdot 10^3 \end{bmatrix}$$

Barra ④ $\frac{EI}{L^3} = \frac{13,5 \cdot 10^9}{2,5^3 \cdot 10^6} = 860$; $\frac{EA}{L} = \frac{18 \cdot 10^7}{2,5 \cdot 10^2} = 720 \cdot 10^3$

$$k = 10^3 \begin{bmatrix} 10,32 & 0 & 5,16 & -10,32 & 0 & 5,16 \\ 0 & 720 & 0 & 0 & -720 & 0 \\ 5,16 & 0 & 860 & -5,16 & 0 & 430 \\ -10,32 & 0 & -5,16 & 10,32 & 0 & 5,16 \\ 0 & -720 & 0 & 0 & 720 & 0 \\ 5,16 & 0 & 430 & 5,16 & 0 & 860 \end{bmatrix}$$

Barra ⑤ $(EI/L^3) = 13,5 \cdot 10^9 / 4^3 \cdot 10^6 = 210$; $(EA/L) = 18 \cdot 10^7 / 4 \cdot 10^2 =$

$$= 4,5 \cdot 10^5$$

$\underline{k} = 10^3$

2,5	0	1,26	-2,5	0	1,26
0	450	0	0	-450	0
1,26	0	506,25	-1,26	0	203,1
-2,5	0	-1,26	2,5	0	1,26
0	-450	0	0	450	0
1,26	0	203,1	1,26	0	4

Barra⑥

$L = 4\sqrt{2} \ ; \ \frac{EA}{L} = \frac{18 \times 10^7}{400\sqrt{2}} =$

$\frac{EI}{L^3} = \frac{13,5 \times 10^9}{(400\sqrt{2})^3} =$

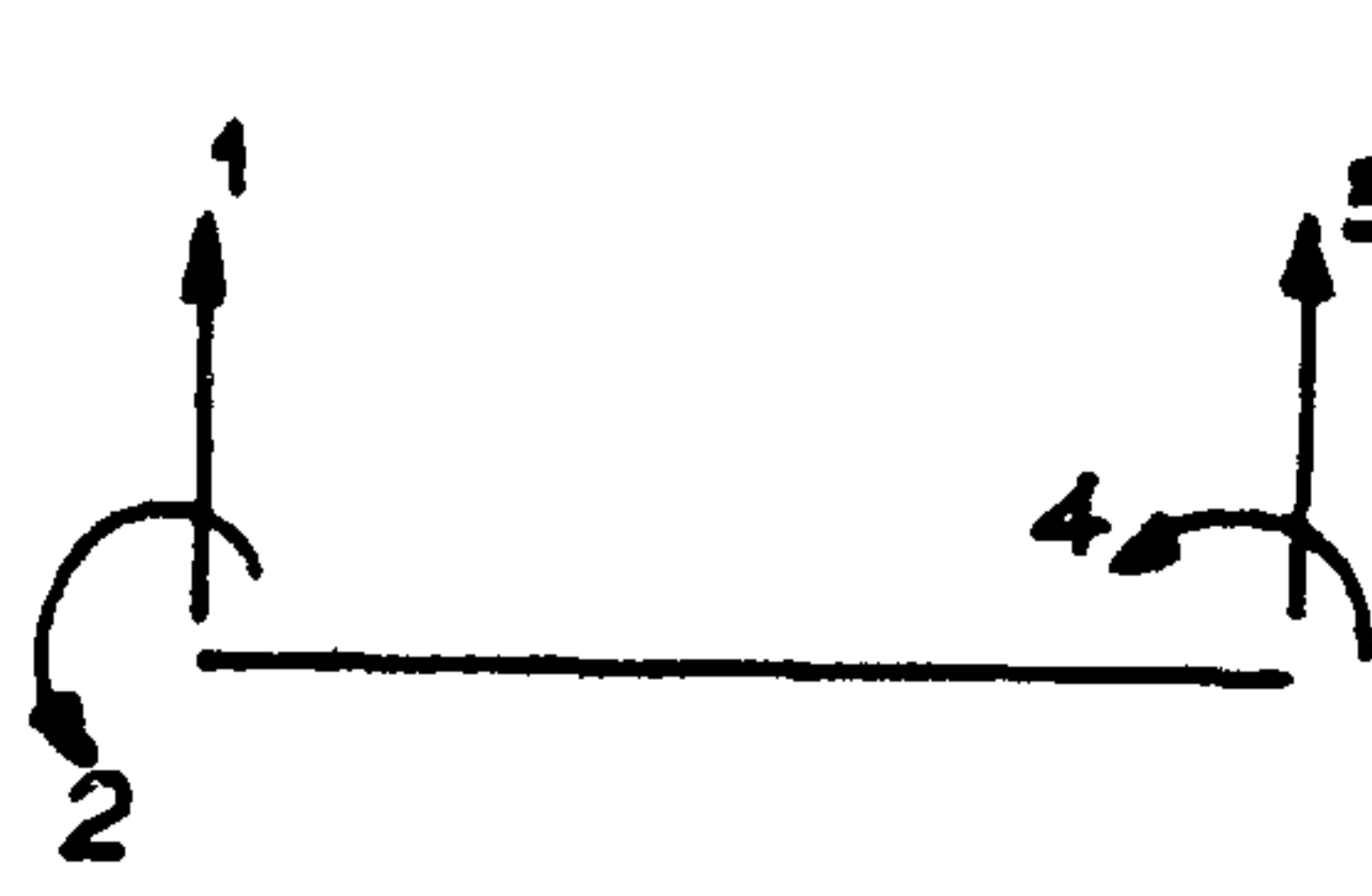
etc.

1.4 Cálculo de esfuerzos.

A partir de la matriz de rigidez elemental es posible calcular los esfuerzos en función de los movimientos nodales. En el caso de la barra a esfuerzo axial vg., tomando la segunda fila (movimientos positivos de 2 \equiv tracción)

$$N = \frac{E^e A^e}{L^e} (-1 \quad 1) \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}^e$$

En la barra a flexión (tracciones abajo, constantes dextrógiros)



$$\begin{Bmatrix} Q \\ A \end{Bmatrix}^e = \frac{E^e I^e}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}^e$$

Así pues, obtenidos los movimientos de los nudos, una vuelta atrás con identificación previa $\delta \equiv u$ y uso de la matriz elemental permite calcular los esfuerzos.

A ellos deberán añadirse los provocados por las cargas repartidas y los debidos a estados iniciales (temperatura, falta de ajuste, etc.). En general

$$\underline{\sigma} = \underline{S} \underline{u} + \underline{\sigma}_p + \underline{\sigma}_{\varepsilon_0}$$

1.5 Resolución del Problema.

El problema ha quedado reducido a la resolución de un sistema de ecuaciones

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{u}$$

Para ello es preciso establecer las condiciones de contorno Particionemos el conjunto en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \underline{C} \\ \text{---} \\ \underline{R} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \text{---} & \text{---} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \text{---} \\ \underline{u}_D \end{Bmatrix}$$

donde \underline{C} son las cargas (datos)

\underline{R} las reacciones (incognitas)

\underline{u} los movimientos en los puntos de aplicación de las cargas (incognitas)

\underline{u}_D los movimientos en los puntos de aplicación de las reacciones (datos)

Desarrollando

$$\underline{C} = \underline{K}_{11} \underline{u}_1 + \underline{K}_{12} \underline{u}_D$$

$$\underline{R} = \underline{K}_{21} \underline{u}_1 + \underline{K}_{22} \underline{u}_D$$

De la primera

$$\underline{u}_1 = \underline{K}_{11}^{-1} (\underline{C} - \underline{K}_{12} \underline{u}_D)$$

1.5 Resolución del Problema.

El problema ha quedado reducido a la resolución de un sistema de ecuaciones

$$\underline{F} = \underline{K} \underline{u}$$

Para ello es preciso establecer las condiciones de contorno Particionemos el conjunto en la forma:

$$\begin{Bmatrix} \underline{C} \\ \text{---} \\ \underline{R} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \text{---} & \text{---} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \text{---} \\ \underline{u}_D \end{Bmatrix}$$

donde \underline{C} son las cargas (datos)

\underline{R} las reacciones (incógnitas)

\underline{u} los movimientos en los puntos de aplicación de las cargas (incógnitas)

\underline{u}_D los movimientos en los puntos de aplicación de las reacciones (datos)

Desarrollando

$$\underline{C} = \underline{K}_{11} \underline{u}_1 + \underline{K}_{12} \underline{u}_D$$

$$\underline{R} = \underline{K}_{21} \underline{u}_1 + \underline{K}_{22} \underline{u}_D$$

De la primera

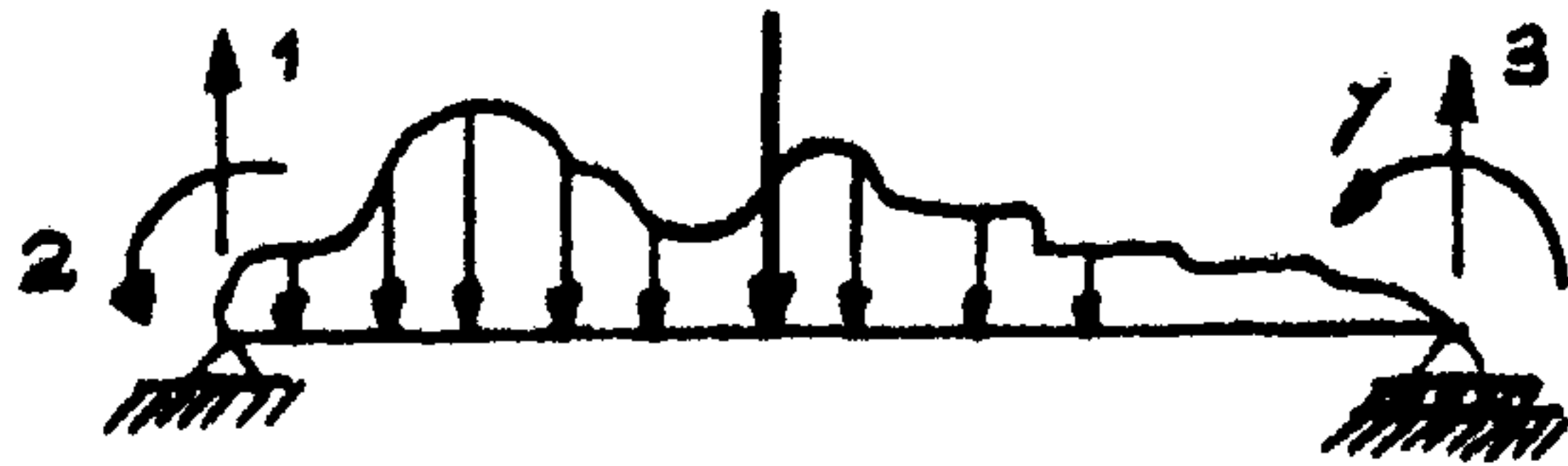
$$\underline{u}_1 = \underline{K}_{11}^{-1} (\underline{C} - \underline{K}_{12} \underline{u}_D)$$

que introducida en la segunda

$$\underline{R} = \underline{K}_2 \underline{K}_{11}^{-1} (\underline{C} - \underline{K}_{12} \underline{U}_D) + \underline{K}_{22} \underline{U}_D$$

El punto clave del proceso radica en la inversión de \underline{K}_{11} que nunca se realiza ya que es más efectivo un método como el de eliminación de Gauss. La partición tampoco suele llevarse a cabo ya que una reordenación provoca la pérdida de la estructura en banda.

En su lugar se procede eliminando las filas y columnas relacionadas con las coordenadas que no intervienen en el fenómeno.



Consideremos por ejemplo la estructura más simple : la viga apoyada.

Una vez obtenidas las cargas equivalentes en los nudos el sistema de ecuaciones es

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{sim.} & & & k_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Está claro que puesto que las condiciones de contorno impiden los movimientos 1 y 3 el sistema efectivo es

$$F_1 = k_{12} u_2 + k_{14} u_4$$

$$F_2 = k_{22} u_2 + k_{24} u_4$$

$$F_3 = k_{32} u_2 + k_{34} u_4$$

$$F_4 = k_{42} u_2 + k_{44} u_4$$

Como F_2 y F_4 son conocidas habría que resolver

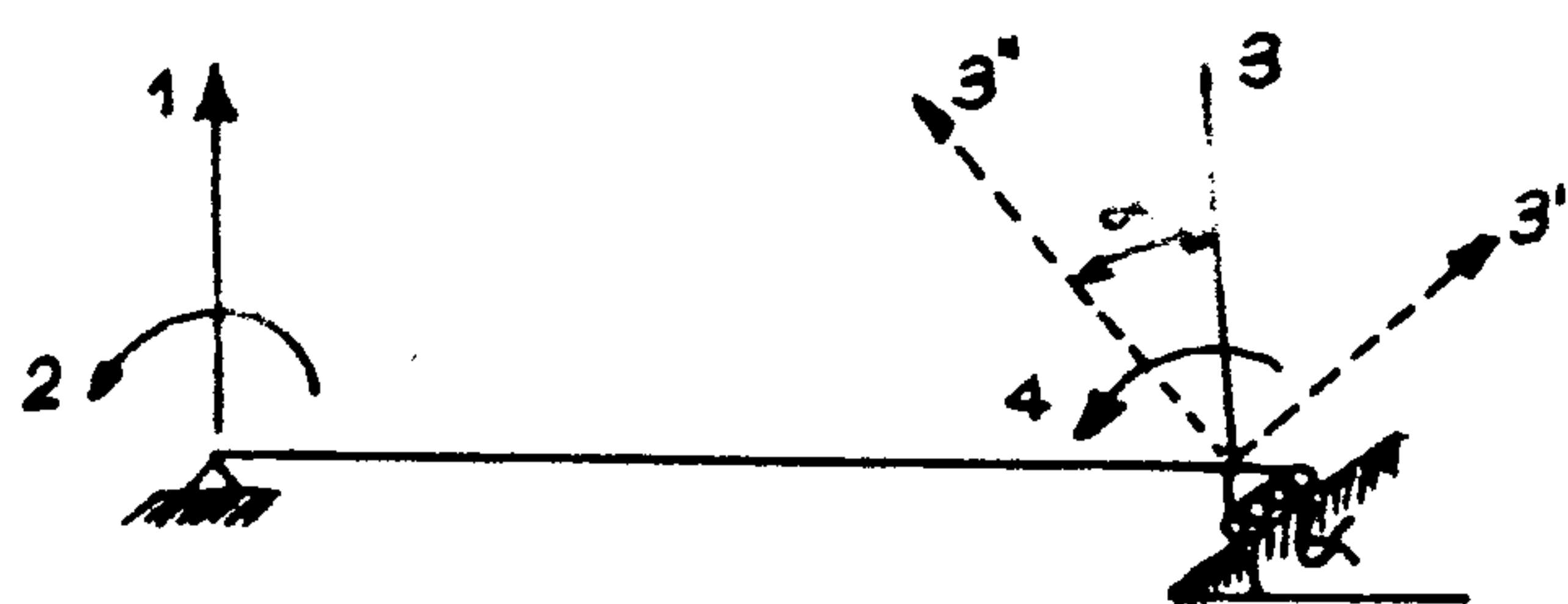
$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{22} & k_{24} \\ k_{42} & k_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

o lo que es equivalente

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 & k_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_{42} & 0 & k_{44} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Es decir, en el caso de apoyos fijos, con objeto de mantener la simetría y el tamaño de la banda se resuelve el sistema resultante de anular filas y columnas de las coordenadas fijas poniendo un 1 en la diagonal principal y ceros en las coordenadas correspondientes del vector de cargas.

Un caso nuevo se presenta cuando las coordenadas de nudo no son concordantes con las globales.



Como

$$u_3 = (\sin \alpha \quad \cos \alpha) \begin{Bmatrix} u'_3 \\ u''_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen } \alpha & \text{cos } \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u'_3 \\ u''_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \text{sen } \alpha & k_{13} \text{cos } \alpha & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \text{sen } \alpha & k_{23} \text{cos } \alpha & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \text{sen } \alpha & k_{33} \text{cos } \alpha & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \text{sen } \alpha & k_{43} \text{cos } \alpha & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u'_3 \\ u''_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Pero

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F'_3 \\ F''_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen} & 0 \\ 0 & 0 & \text{cos} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \text{sen } \alpha & k_{13} \text{cos } \alpha & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \text{sen } \alpha & k_{23} \text{cos } \alpha & k_{24} \\ k_{31} \text{sen } \alpha & k_{32} \text{sen } \alpha & k_{33} \text{sen}^2 \alpha & k_{33} \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha & k_{34} \text{sen } \alpha \\ k_{31} \text{cos } \alpha & k_{32} \text{cos } \alpha & k_{33} \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha & k_{33} \text{cos}^2 \alpha & k_{34} \text{cos } \alpha \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} \text{sen } \alpha & k_{43} \text{cos } \alpha & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u'_3 \\ u''_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Repitiendo el proceso de anulación de filas y columnas

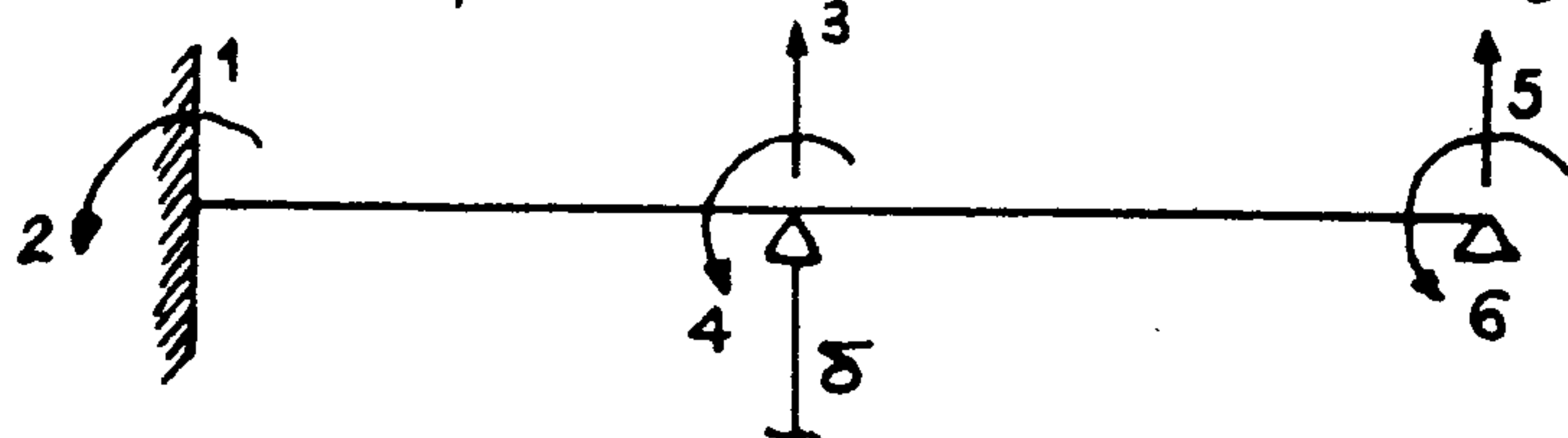
$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \\ F'_3 \\ 0 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \sin \alpha & 0 & k_{24} \\ 0 & k_{23} \sin \alpha & k_{33} \sin^2 \alpha & 0 & k_{34} \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k_{24} & k_{34} \sin \alpha & 0 & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u'_3 \\ u''_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Obsérvese

- 1º) Ha sido necesario ampliar el tamaño, cosa que no sucedería si se hubiese considerado la posibilidad de alargamiento de la barra.
- 2º) El efecto del giro en el apoyo es proyectar las fuerzas en los nuevos ejes: por eso hay que multiplicar filas y columnas por $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$, respectivamente.

Finalmente veremos el caso de asiento de un apoyo.

En la viga continua de la figura el apoyo central experimenta un descenso $-\delta$.



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \text{---} \\ F_3 \\ F_4 \\ \text{---} \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} k_{13} \\ k_{23} \\ \\ k_{33} \\ k_{43} \\ \\ k_{53} \\ k_{63} \end{matrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \text{---} \\ u_3 \\ u_4 \\ \text{---} \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

\uparrow
 3ª columna

Si se dá a 3 un movimiento - δ manteniendo ce
 ro los demás aparecen unas fuerzas de empotramiento perfecto.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = -\delta \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \\ k_{53} \\ k_{63} \end{Bmatrix}$$

El efecto es pues equivalente a un sistema de
 cargas igual y contrario en los nudos de modo que el vector de car_g
 gas se verá alterado en la forma:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} + \delta \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \\ k_{53} \\ k_{63} \end{Bmatrix} = \underline{K} \underline{u}$$

Si se imponen ahora las condiciones $u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = 0$ el sistema sería

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_4 + k_{43} \\ 0 \\ F_6 + k_{63} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 & k_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{64} & 0 & k_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix}$$

Observese que se ha sumado al vector de cargas la tercera columna multiplicada por δ debido a que el movimiento impuesto era negativo.

De forma análoga se pueden tratar los defectos iniciales, variaciones térmicas, etc.

A grandes rasgos, pues, el esquema de funcionamiento de método de la rigidez consta de

- a) Formación de las matrices elementales \underline{k}^e .
- b) Suma $\underline{K} = \sum \underline{k}^e$.
- c) Modificar para tener en cuenta condiciones previas de autotensión.
- d) Modificar para condiciones especiales de - apoyo .
- e) Eliminación de filas y columnas relacionadas con coacciones (selección de la matriz \underline{K}_{11}).
- f) Resolución del sistema y obtención de \underline{u} .
- g) Obtención de esfuerzos elementales \underline{P}^e .
- h) Equilibrio de nudos para obtener \underline{R} .

Lección 2.- Introducción.

En esta lección vamos a generalizar la manera de proceder esquematizada en el capítulo anterior, a continuos elásticos bidimensionales.

En un primer apartado tantearemos, desde un enfoque intuitivo, el caso de problemas elásticos en tensión plana. Aunque el procedimiento no tiene excesiva utilidad en casos más complejos, su estudio es formativo. A continuación se bosqueja el importante caso axisimétrico, en el que se observa la generalización del concepto "nodo" y "fuerza nodal".

El capítulo termina con el planteamiento general del procedimiento mediante el teorema de los trabajos virtuales.

2.- El continuo bidimensional.

El tratamiento de los problemas bidimensionales sigue el esquema general, es decir

- a) Discretización (Elementos, nodos y variables nodales, funciones de forma)
- b) Matrices "elementales" \underline{k} , \underline{P} , \underline{m} , etc.
- c) Síntesis de propiedades globales
- d) Resolución del sistema de ecuaciones.
- e) Resustitución.

En el caso concreto que nos ocupa, la solución está contenido en funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ continuos con derivada continua, que representan los movimientos del sistema. A -

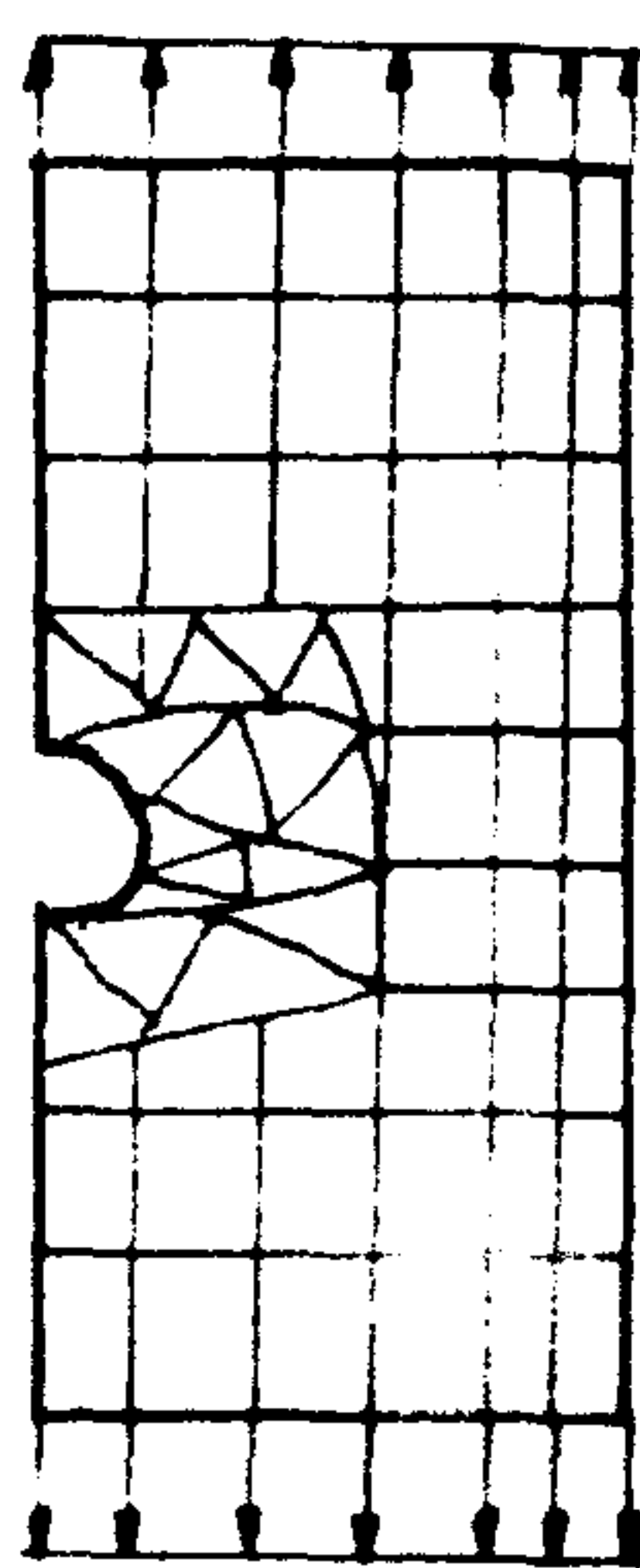
partir de ellos se definen unas relaciones movimientos deformaciones

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

y unas tensiones σ_{ij} relacionadas con ellas mediante la ley de comportamiento

$$\sigma_{ij} = \lambda \vartheta \delta_{ij} + 2 G \varepsilon_{ij}$$

Las incógnitas básicas del problema serán pues los movimientos nodales \underline{u}^e de un elemento e . El problema estriba en la imposibilidad de identificar éstos en forma semejante al caso de estructuras de barras en las que se hacia elemento ↔ barra.



(Fig.- 2.1)

En nuestro caso los elementos deberán imaginarse sobre el continuo. Por ejemplo en la Fig. 2.1 se ha representado el caso de una banda agujereada sometida a tracción - en que la división básica mediante rectángulos se transforma en triángulos para poder acomodar un contorno curvo.

En cualquier caso "nodos" serán los vértices de las figuras elementales y como "variables nodales" elegiremos los movimientos de cada uno de ellos.

Al igual que en estructuras de barras un paso necesario es describir la conexión de los elementos. Nuevamente una numeración adecuada es imprescindible si se quiere minimi

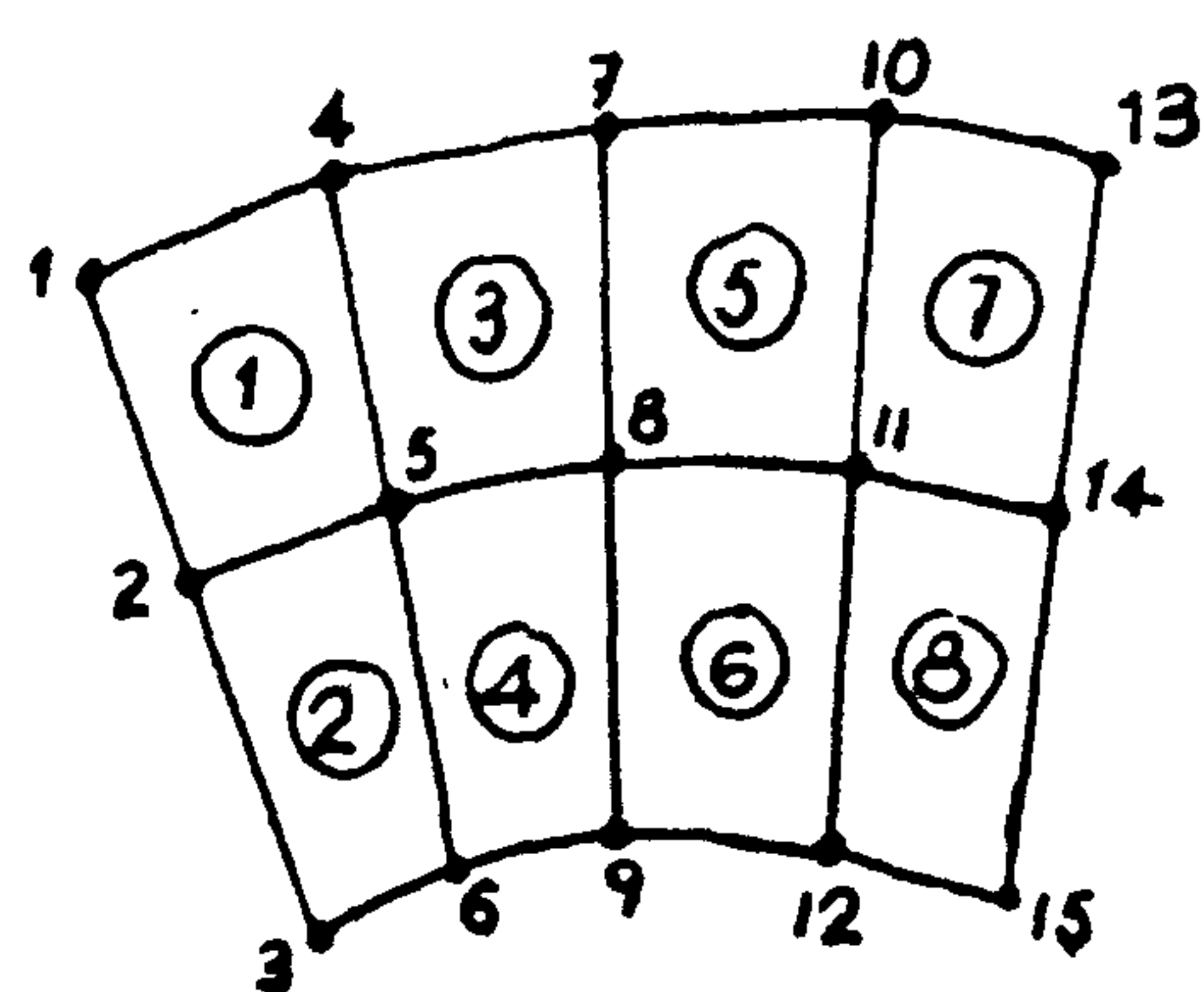


FIG. 2.2.

TABLA DE CONECTIVIDAD

Elementos	NODOS			
	1	2	3	4
1	1	2	5	4
2	2	3	6	5
3	4	5	8	7
4	5	6	9	8
5	7	8	11	10
6	8	9	12	11
7	10	11	14	13
8	11	12	15	14

EJERCICIO

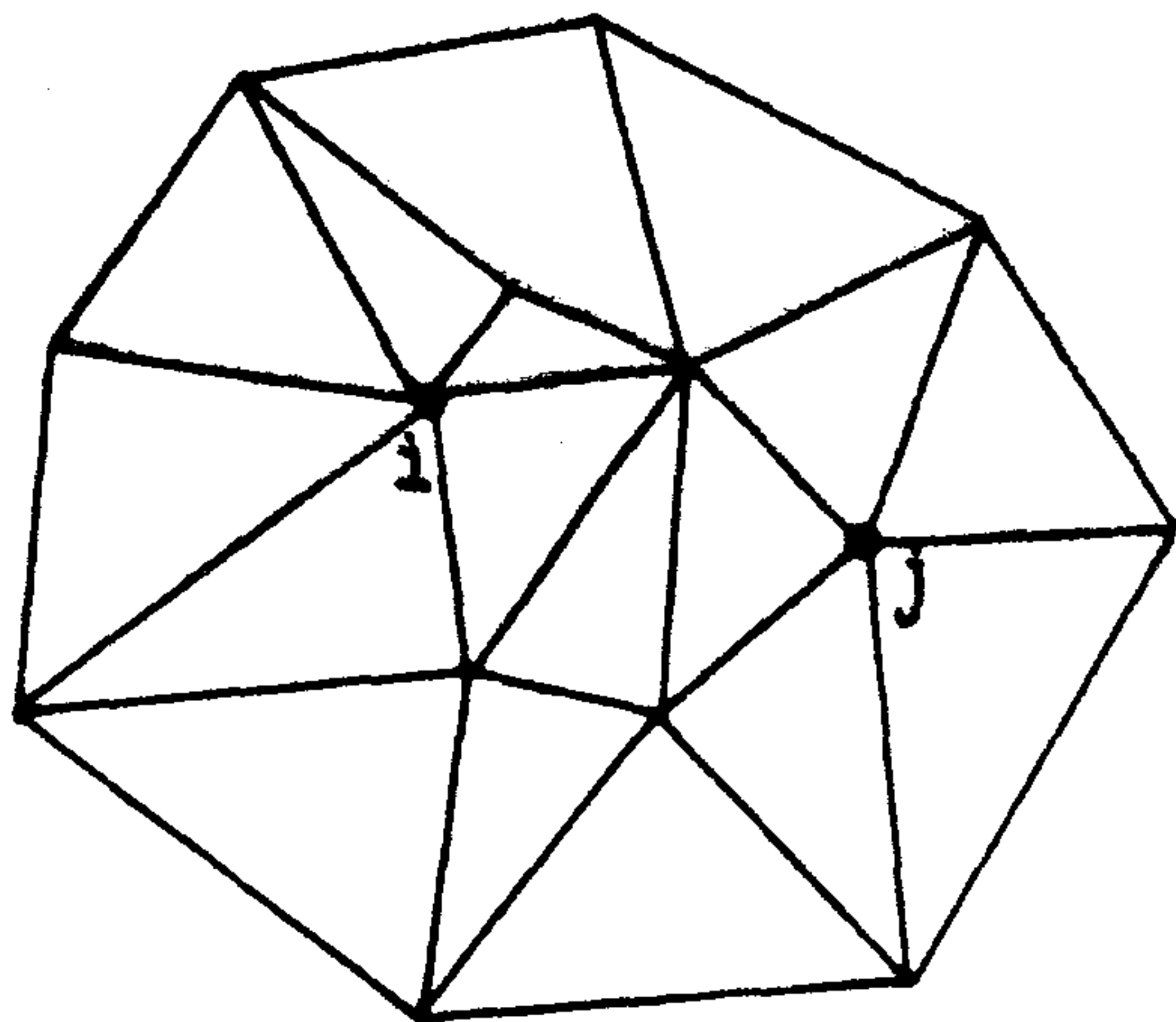
Dibujar el esquema de ocupación de la matriz de rigidez total y discutir la bondad de la numeración elegida.

Tras la discretización se precisa el cálculo de las matrices elementales. Prescindiendo del recurso "funciones de forma" vamos a ver, en el apartado siguiente, como se pueden calcular por métodos más o menos intuitivos.

2.1 Elasticidad plana. Enfoque intuitivo.

Según vimos en el capítulo anterior la síntesis de las propiedades de la estructura se conseguía mediante el método directo de la rigidez superponiendo las matrices elementales.

El problema clave es, pues, la determinación de las matrices de rigidez elementales correspondientes a los diferentes casos en estudio. Para fijar ideas vamos a considerar el caso de la elasticidad plana, donde la discretización del continuo se -



realiza en forma de triángulos.

En primer lugar es preciso disponer de una formula general para determinar cada k_{ij} . El camino más intuitivo es a través del teorema de los trabajos virtuales.

k_{ij} es la fuerza en i cuando a j se le dá un movimiento unidad. Además existen unas tensiones interiores

$$\sigma^j(x, y, z)$$

en equilibrio con todas las k .

Para hacer trabajar exclusivamente a k_{ij} usaremos el campo de movimientos y deformaciones que se obtiene al dar movimiento unidad en i manteniendo cero los demás

$$\varepsilon^i(x, y, z)$$

Así pues

$$1 = \int_D \underbrace{\sigma^j \cdot (\varepsilon^i)^T}_{\text{trabajo virtual}} dv \quad \dots(2.1)$$

Nuestro problema ahora, es cómo calcular las $\underline{\sigma}$ $\underline{\epsilon}$ provocadas por esos movimientos unidad. Puesto que no se dispone de ningún soporte teórico partiremos de una hipótesis razonable para expresar el campo de movimientos en el interior del elemento.

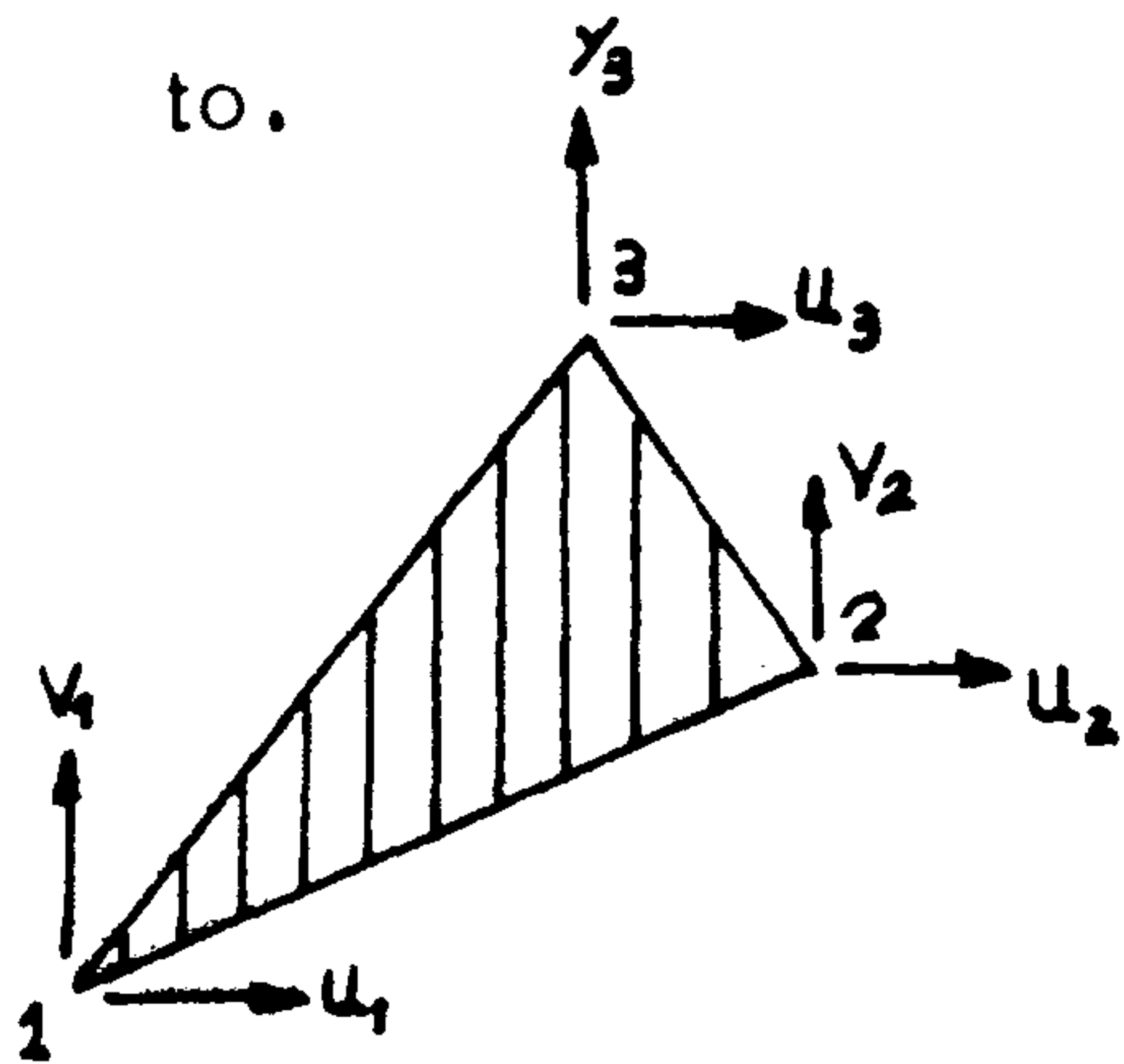


Fig. 2.4.

Supongamos por ejemplo

$$u(\xi, y) = C_1 + C_2 \xi + C_3 y$$

$$v(\xi, y) = C_4 + C_5 \xi + C_6 y$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & y \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} \quad 2.2$$

Debe observarse que existe el mismo número de constantes indeterminadas que grados de libertad del elemento. Ello es debido a que estos últimos van a ser utilizados como incógnitas de referencia y por tanto será preciso obtener una relación

$$\underline{C} \leftrightarrow \underline{\delta}$$

invertible. Veámoslo.

Particularizando para cada nodo

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \hline u_2 \\ v_2 \\ \hline u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ \hline 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ \hline 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \hline C_3 \\ C_4 \\ \hline C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} \quad (2.2')$$

ó bien

$$\underline{\delta} = \underline{A} \underline{C}$$

por lo que

$$\underline{C} = \underline{A}^{-1} \underline{\delta} \quad \dots\dots(2.3)$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \underline{A}^{-1} \underline{\delta}$$

que es lo que se pretendia.

Esta relación sirve para definir las funciones de forma que encontramos en el capítulo primero. En efecto cada co-

por lo que $(\varepsilon^i)^T = \underline{B}^T \quad \dots(2.7)$

El mismo esquema permite obtener $\underline{\sigma}^j$

Puesto que, en tensión plana

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{aligned} \right\} \varepsilon_x + \nu \varepsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_x (1 - \nu^2) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad \dots(2.8)$$

y usando (2.5)

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{\delta}$$

ó bien

$$\underline{\sigma}^j = \underline{D} \underline{B} \quad \dots(2.9)$$

Trás las sustituciones oportunas en (2.1)

$$\underline{k} = \int_D \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dv \quad \dots(2.10)$$

y como todas las matrices son numéricas, si t es el espesor y A el área del triángulo

$$\underline{k} = \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} A t \quad 2.10$$

Realizando las operaciones y llamando

$$x_{ij} = x_i - x_j ; y_{ij} = y_i - y_j ; A = \frac{1}{2} (x_{32} y_{21} - x_{21} y_{32})$$

se obtiene

(2.11)

sim

[illegible]

$$x_{ij} = x_i - x_j; \quad y_{ij} = y_i - y_j; \quad A \equiv \text{area del triangolo} = \frac{1}{2}(x_{32}y_{21} - x_{21}y_{32})$$

A fin de identificar este procedimiento con el realizado en el capítulo anterior es preferible realizar un cambio de ordenación en el listado del vector de movimientos. Así sería preferible escribir (2.2') como

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & & & \\ & 1 & x_2 & y_2 & & 0 \\ & & 1 & x_3 & y_3 & \\ \hline & & & & & 1 & x_1 & y_1 \\ & 0 & & & & 1 & x_2 & y_2 \\ & & & & & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} \quad (2.2'')$$

(2.2'')

ya que en este caso se observa muy bien que la matriz \underline{A} se compone de 4 bloques iguales 2 a 2. Al invertirla \underline{A}^{-1} estaría en la misma forma y por ello

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{1} \ x \ y & \underline{0} \\ \underline{0} & 1 \ x \ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & & \underline{0} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & & \\ \hline & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & \underline{0} & & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{11}+a_{21}x+a_{31}y & a_{12}+a_{22}x+a_{32}y & a_{13}+a_{23}x+a_{33}y & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a_{11}+a_{21}x+a_{31}y & a_{12}+a_{22}x+a_{32}y & a_{13}+a_{23}x+a_{33}y \end{array} \right] \delta$$

(2.12)

y se observa claramente la aparición de las funciones de forma li-
neales

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \delta$$

(2.13)

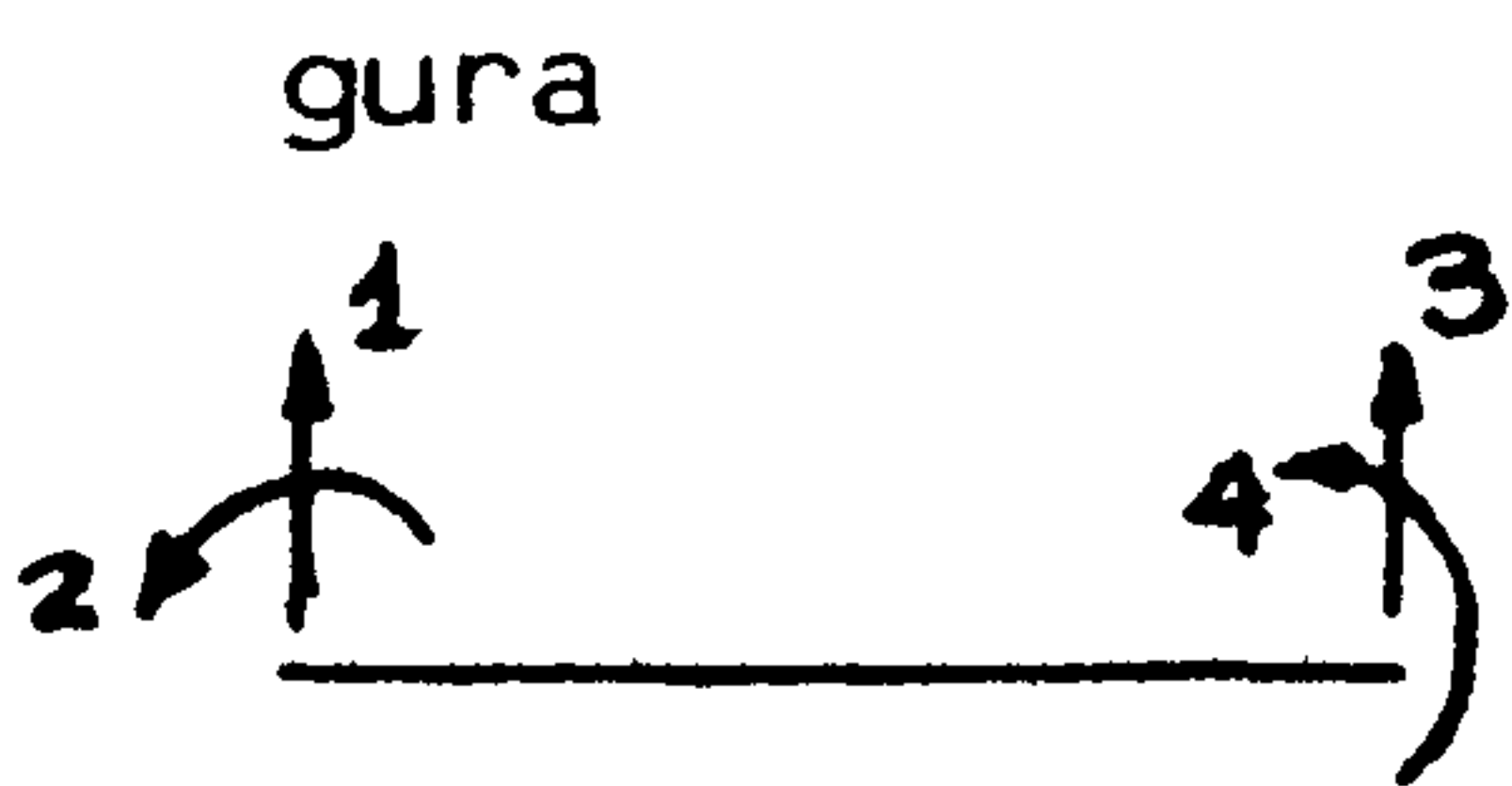
$\underline{u} = \underline{N} \cdot \underline{\delta}$

(2.14)

En capitulos posteriores volveremos sobre
esta idea

EJERCICIO

Aplicar la filosofia anterior al caso de la fi



$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$$
$$dy/dx = c_2 + 2 c_3 x + 3 c_4 x^2$$

$$\begin{Bmatrix} y \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}, \quad \underline{\delta} = \underline{A} \underline{C}$$

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}, \quad \underline{C} = \underline{A}^{-1} \underline{\delta}$$

A partir de aquí se seguiría considerando las deformaciones equivalentes a las curvaturas, las tensiones equivalentes a los momentos flectores y la integral de volumen a una integral de línea. Las funciones de forma se obtendrían de

$$y = (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3) \underline{A}^{-1} \underline{\delta}$$

Por ejemplo la primera columna de \underline{A}^{-1} condu

ce a

$$y = \left[\left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right); \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right); \left(3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \right); \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \right] \delta$$

Respecto a la rigidez, como

$$x = y'' = \underbrace{[0, 0, 2, 6x]}_{\underline{B}} \underline{A}^{-1} \underline{\delta}$$

$$M = E I x = E I \underline{B} \delta$$

se obtendria

$$k = \int_0^L \underline{B}^T E I \underline{B} dx$$

donde

$$\underline{B} = [0, 0, 2, 6x] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/L^2 & -2/L & 3/L^2 & -1/L \\ 2/L^3 & 1/L^2 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[-\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3}; -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}; \dots \text{etc.} \right]$$

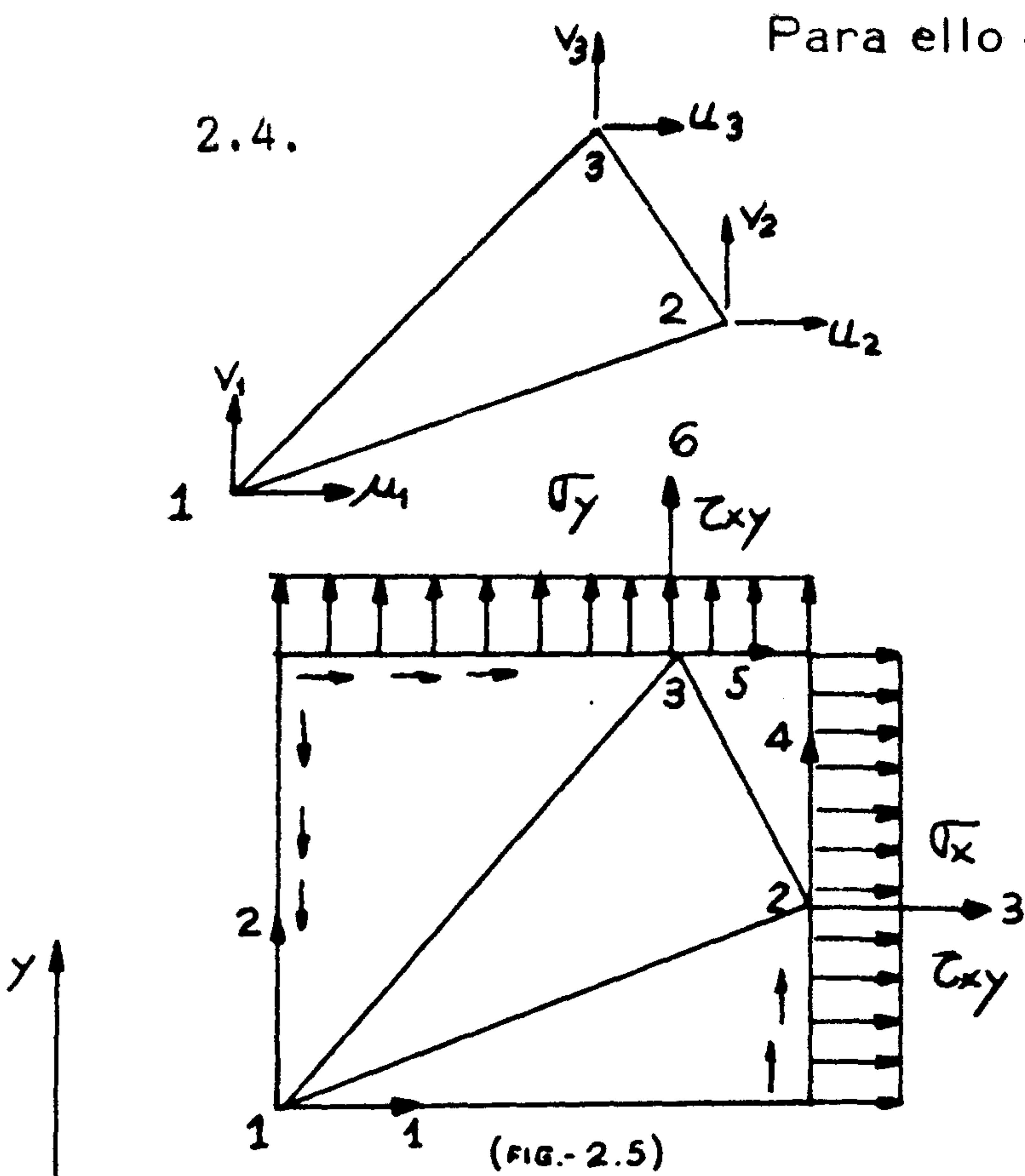
El resultado es

$$\underline{k} = \frac{EI}{L^3}$$
$$\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

sim

identica a la del capítulo anterior, como cabía esperar de la interpolación utilizada.

Para el estudio de un problema estático queda por determinar el modo de obtener las cargas equivalentes en los nudos.



Para ello consideremos de nuevo la figura -

Si el estado de tensiones es constante es posible proyectar según se indica en fig.(2. 5).

Una idea intuitiva consiste - en repartir la carga entre los tres vértices. La descomposición puede hacerse de infinitas maneras, la más "lógica" (?) es la siguiente

$$P_1 = \left\{ \sigma_x \left[\frac{y_2 - y_1}{2} - \frac{y_3 - y_1}{2} \right] + \tau_{xy} \left[- \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{x_3 - x_1}{2} \right] \right\} t$$

$$P_2 = \left\{ \sigma_y \left[\frac{x_3 - x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2} \right] + \tau_{xy} \left[\frac{y_2 - y_1}{2} - \frac{y_3 - y_1}{2} \right] \right\}_t$$

etc.

Es decir,

$$P_1 = \frac{t}{2} \left[(y_2 - y_3) \sigma_x + (x_3 - x_2) \tau_{xy} \right]$$

$$P_2 = \frac{t}{2} \left[(y_2 - y_3) \tau_{xy} + (x_3 - x_2) \sigma_y \right]$$

y análogamente

$$P_3 = \frac{t}{2} \left[(y_3 - y_1) \sigma_x + (x_1 - x_3) \tau_{xy} \right]$$

$$P_4 = \frac{t}{2} \left[(y_3 - y_1) \tau_{xy} + (x_1 - x_3) \sigma_y \right]$$

$$P_5 = \frac{t}{2} \left[(y_1 - y_2) \sigma_x + (x_2 - x_1) \tau_{xy} \right]$$

$$P_6 = \frac{t}{2} \left[(y_1 - y_2) \tau_{xy} + (x_2 - x_1) \sigma_y \right]$$

Podría así escribirse

$$\begin{aligned}
 \underline{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_3 \\ P_5 \\ P_2 \\ P_4 \\ P_6 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & 0 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & x_3 - x_2 & y_2 - y_3 \\ 0 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \cdot \frac{t}{2} = A t \underline{Q} \underline{\sigma} = \\
 &= \int_D \underline{Q} \underline{\sigma} dv
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Usando (2.8) y (2.5)

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} = \underline{D} \underline{B} \underline{\delta}$$

sería posible poner

$$\underline{P} = \int_D \underline{Q} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\delta}
 \tag{2.15}$$

y como

$$\underline{P} = \underline{k} \underline{\delta} = \left[\int_D (\underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}) dv \right] \underline{\delta}$$

se sigue

$$\underline{Q} = \underline{B}^T ; \quad \underline{P} = \int_D \underline{B}^T \cdot \underline{\sigma} dv
 \tag{2.16}$$

lo cual está en concordancia con lo establecido en el capítulo anterior, según veremos en (2.38).

Este enfoque es el original de TURNER, CLOUGH, MARTIN y TOPP.

2.2.- Cuerpos Axisimetricos.

En el caso de cuerpos con simetria alrededor de un eje basta establecer las condiciones en una sección meridiana para tener determinado el cuerpo total.

Si llamamos Z al eje de simetria un punto vendrá determinado por 2 coordenadas (r , z) que miden la distancia al eje y su altura. Los movimientos posibles son tambien (u , v) correspondientes a ambas direcciones.

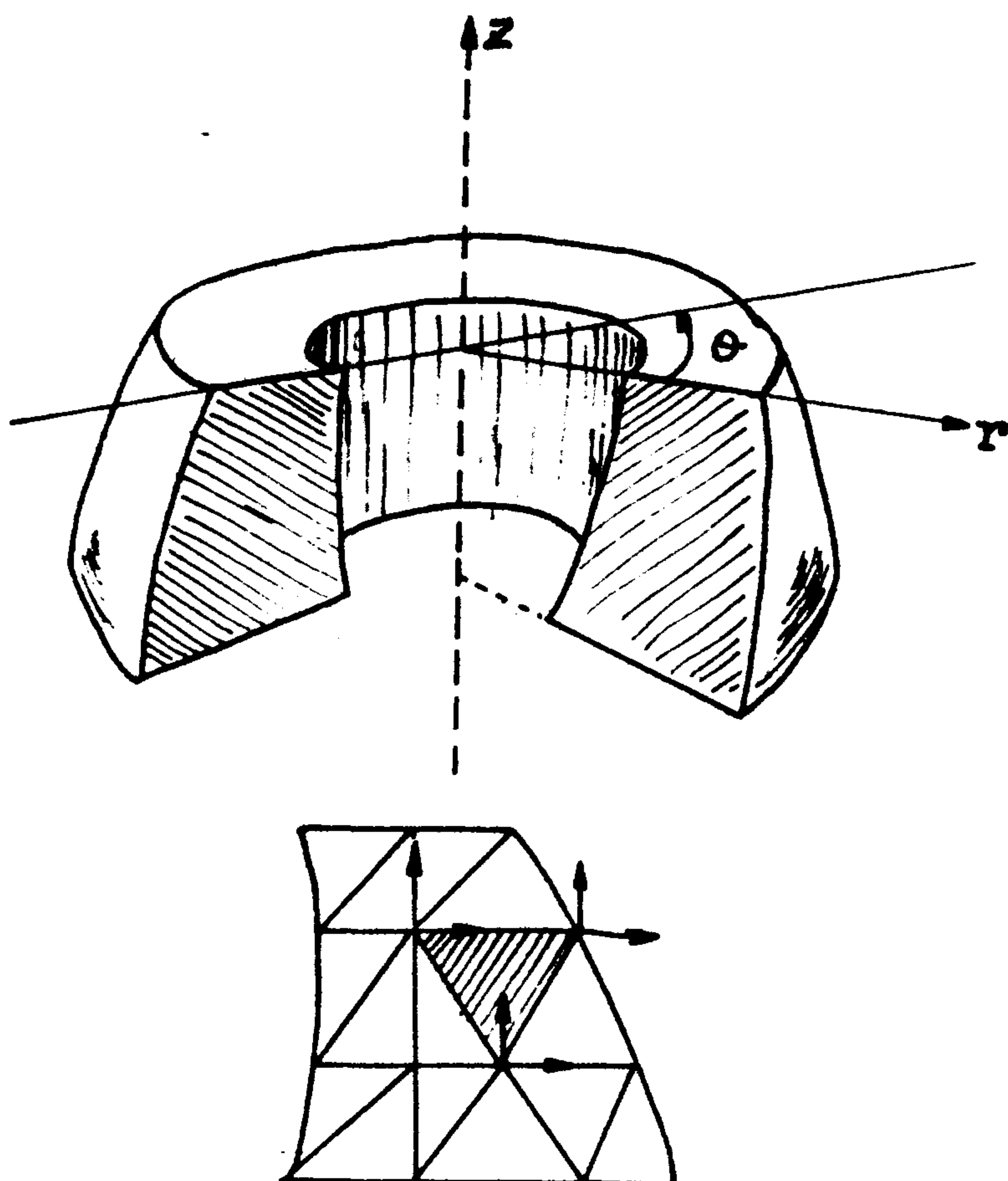


FIG. 2.6.

En cuanto a las deformaciones

$$\varepsilon_r = u , r$$

$$\varepsilon_{\theta} = u / r$$

$$\varepsilon_z = v , z$$

$$\gamma_{rz} = u , z + v , r$$

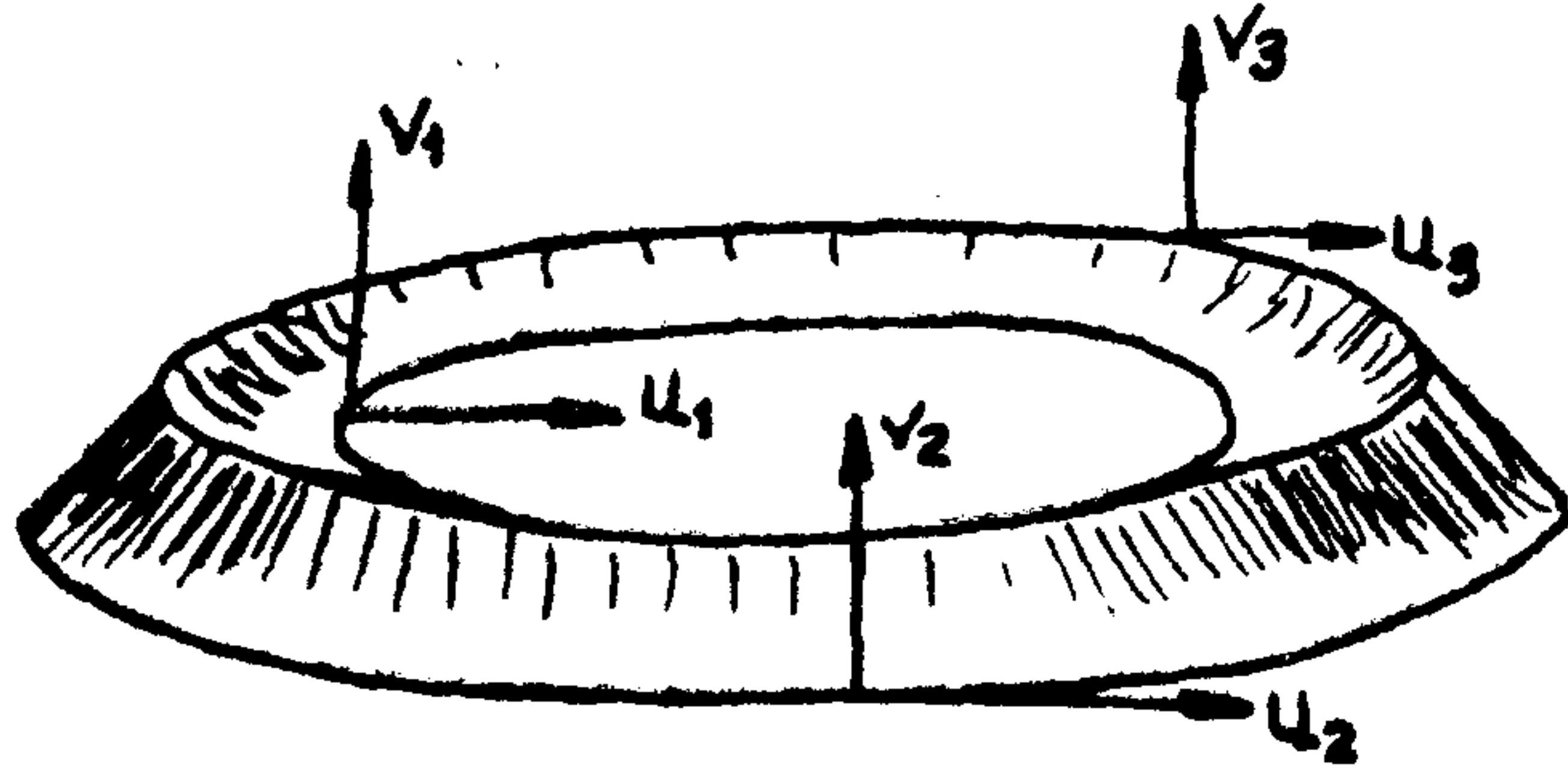
(2.17)

y la ley de comportamiento

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_{\theta} + \sigma_z)]$$

(2.18)

La discretización es semejante a la realizada en los problemas planos con la variante de que sólo es preciso discretizar la sección meridiana. Un elemento es ahora



un anillo de sección triangular ó rectangular y un nodo es una línea circular. En forma semejante las cargas equivalente serán anillos de cargas.

La formulación, sin embargo, no se complica por ello, y el modo de proceder es completamente paralelo al del apartado anterior.

Veamos el caso del elemento triangular con hipótesis de movimientos lineales

$$\begin{cases} u = c_1 + c_2 r + c_3 z \\ v = c_4 + c_5 r + c_6 z \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r & z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{e} \\ \underline{C} \end{Bmatrix}$$

(2.19)

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hline v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_2 & z_2 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r_3 & z_3 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & 1 & r_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & r_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \hline c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\delta} = \underline{A} \cdot \underline{c}$$

(2.20)

El caso es completamente análogo al anterior
y se llegaría a una fórmula paralela a la (2.13), es decir

$$\begin{Bmatrix} u(r, z) \\ \hline v(r, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & | & \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \hline v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}^e$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{\delta}$$

(2.21)

donde Φ_i son las funciones de forma lineales.

Para obtener la relación deformaciones-movimientos recurrimos a (2, 17) en forma matricial

$$\underline{\varepsilon}(r,z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 1 & z/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{A}^{-1} \underline{\delta} = \underline{B} \underline{\delta} \quad \dots (2.22)$$

Obsérvese que \underline{B} difiere de la escrita en (2.5) en las dimensiones (en plana era 3×6 y ahora 4×6) y en que aparecen en la segunda fila términos dependientes de las coordenadas. \underline{B} no es ahora una matriz constante.

Escribiendo explícitamente

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{r_2(z_3 - z_1) + r_1(z_2 - z_3) + r_3(z_1 - z_2)}$$

$$\begin{bmatrix} r_2 z_3 - r_3 z_2 & z_1 r_3 - z_3 r_1 & r_1 z_2 - r_2 z_1 & 0 & 0 & 0 \\ z_2 - z_3 & z_3 - z_1 & z_1 - z_2 & 0 & 0 & 0 \\ r_3 - r_2 & r_1 - r_3 & r_2 - r_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & r_2 z_3 - r_3 z_2 & z_1 r_3 - z_3 r_1 & r_1 z_2 - r_2 z_1 \\ 0 & 0 & 0 & z_2 - z_3 & z_3 - z_1 & z_1 - z_2 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 - r_2 & r_1 - r_3 & r_2 - r_1 \end{bmatrix}$$

(2.23)

El resto del proceso es completamente análogo

go.

Para obtener la relación tensión-deformación
se usa (2.18)

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = 1/E \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \dots (2.24)$$

Obsérvese que ahora $\underline{\underline{D}}$ es (4×4) .

De esta forma

$$\underline{\underline{k}} = \int_D \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}} \, dv$$

$6 \times 6 \quad (6 \times 4) \cdot \quad (4 \times 4) \cdot (4 \times 6)$

(2.25)

Teniendo en cuenta la forma del volumen que
se maneja se puede poner

$$dv = 2 \pi r \, da \quad (2.26)$$

donde r es el radio del punto en estudio y da el elemento de
área

$$\underline{\underline{k}} = 2 \pi \int_{A_m} \underline{\underline{B}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}} r \, da \quad (2.27)$$

A_m es el área contenida en la sección meridiana.

\underline{D} es constante pero \underline{B} es función de (r, z) .

Será preciso recurrir a una integración numérica en para su obtención. Una alternativa, no demasiado mala consiste en particularizar \underline{B} en un punto interior y calcular así (2.27). Ello equivale a una integración numérica con un solo punto que da buenos resultados si la malla es muy fina. Por otro lado ello siempre es así puesto que el elemento con deformación constante precisa una subdivisión muy grande para que produzca buenos resultados, y ello explica la aplicabilidad de esta alternativa. Si se escoge el C.D.G.

$$\underline{k} = 2\pi r_G A (1 \underline{B}_{cdg}^T \underline{D} \underline{B}_{cdg}) = 2\pi r_G A \underline{B}_{cdg}^T \underline{D} \underline{B}_{cdg}$$

El 1 es el factor de ponderación correspondiente a una cuadratura de Hammer bidimensional con un solo punto de integración.

Respecto al anillo de cargas equivalentes (eq 2.16)

$$\underline{P} = \int_D \underline{B}^T \underline{\sigma} dv = 2\pi \int_{A_m} \underline{B}^T \underline{\sigma} r dA$$

ó bien

$$\underline{P} = 2\pi r_g A \underline{B}_{cdg}^T \underline{\sigma} (1) = 2\pi r_g A \underline{B}_{cdg}^T \cdot \underline{\sigma}$$

si se escoge la integración de Hammer.

3.- Formulación general del F.E.M. en movimientos.

Existen varias posibilidades de formulación del método de los elementos finitos. Probablemente la mas sencilla sea - la que parte del teorema de los trabajos virtuales.

Para obtenerlo se parte de la integral

$$I = \int_D \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} dv$$

Sustituyendo valores

$$\begin{aligned} I &= \int_D \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \tau_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dv = \\ &= \int_D \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left(\tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ &\quad + \left(\tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) dv = \int_D \underline{\nabla} \underline{u}^T \cdot \underline{\sigma} dv, \\ &= \int_D \text{div} (\underline{u}^T \cdot \underline{\sigma}) dv - \int_D \underline{u}^T \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} = \int_{\partial D} \underline{u}^T \underline{\sigma} \cdot \underline{v} da - \\ &\quad - \int_D \underline{u}^T \cdot \underline{\nabla} \underline{\sigma} \end{aligned}$$

Pero por las condiciones de equilibrio

$$\nabla \cdot \underline{\sigma} = - \underline{X}_t \quad ; \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}$$

donde \underline{X}_t son las fuerzas totales por unidad de volumen incluyendo - las de inercia \underline{T} el vector tensión en el contorno.

Así pues

$$I = \int_{\partial D} \underline{u}^T \cdot \underline{T} da + \int_D \underline{u}^T \underline{X}_t dv$$

o lo que es igual

$$\int_D \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\sigma} dv = \int_D \underline{u}^T \underline{X}_t dv + \int_{\partial D} \underline{u}^T \cdot \underline{T} da$$

(2.28)

Poniendo

$$\underline{X}_t = \underline{X} - \gamma \underline{\ddot{u}}$$

(2.29)

y la ley de comportamiento

$$\underline{\sigma} = \underline{D} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_0)$$

(2.30)

donde $\underline{\varepsilon}_0$ son deformaciones iniciales (vg. debidas a variaciones - térmicas) (2.28) se transforma en

$$\int_D \underline{\varepsilon}^T \underline{D} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_0) dv = \int_D \underline{u}^T (\underline{X} - \gamma \underline{\ddot{u}}) +$$

$$+ \int_{\partial D} \underline{u}^T \cdot \underline{T}^v da$$

(2.31)

3.1.-Matrices elementales.

Apliquemos la ecuación (2.31) al caso de un elemento en el que se ha supuesto

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{\delta}$$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{\delta}$$

(2.32)

$$\int_D \underline{\delta}^T \underline{B}^T \underline{D} (\underline{B} \underline{\delta} - \underline{\varepsilon}_0) dv = \int_D \underline{\delta}^T \underline{N}^T (\underline{X} - \gamma \underline{N} \underline{\ddot{\delta}}) dv +$$

$$+ \int_{\partial D} \underline{\delta}^T \underline{N}^T \underline{T}^v da$$

(2.33)

Como $\underline{\delta}$ es constante se puede sacar de las integrales y eliminar, así (2.33) queda, tras una adecuada reordenación, en la forma

$$\left[\int_D \gamma \underline{N}^T \underline{N} dv \right] \ddot{\underline{\delta}} + \left[\int_D \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dv \right] \underline{\delta} =$$

$$\int_D \underline{N}^T \underline{X} dv + \int_D \underline{B}^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_o dv + \int_{\partial D} \underline{N}^T \underline{T} da$$

(2.33)

que puede escribirse como

$$\underline{m} \ddot{\underline{\delta}} + \underline{k} \underline{\delta} = \underline{P} + \underline{P}_o$$

(2.34)

en la que se han definido

matriz de masa consistente :

$$\underline{m} = \int_D \underline{N}^T \gamma \underline{N} dv$$

(2.35)

matriz de rigidez :

$$\underline{k} = \int_D \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dv$$

(2.36)

matriz de cargas nodales consistentes :

$$\underline{P} = \int_D \underline{N}^T \underline{X} dv + \int_{\partial D} \underline{N}^T \underline{T} da$$

(2.37)

matriz de cargas nodales iniciales:

$$\underline{P}_o = \int_D \underline{B}^T \underline{D} \underline{\varepsilon}_o dv$$

(2.38)

Comparando (2.38) con (2.16) se observa que $\underline{D} \underline{\varepsilon}_o$ desempeña el papel de "tensiones iniciales".

Las fórmulas anteriores son absolutamente generales y permiten determinar las matrices elementales en cualquier tipo de discretización. La clave del método de los elementos finitos radica puen en (2.32), es decir, en la elección de las funciones de forma contenidas en \underline{N} que permiten pasar de los infinitos grados de libertad del elemento a los representados por las variables nodales que se hayan elegido.

Las condiciones que deban cumplir las \underline{N} para garantizar la convergencia de resultados serán discutidas más adelante.

3.2.- Síntesis de las ecuaciones de campo.

El método directo de la rigidez, tal como ha sido presentado en el capítulo anterior, permite la síntesis de las matrices globales del problema. Paso previo es, no obstante, la escritura de las matrices elementales en coordenadas globales.

En efecto, aunque en los apartados anterior-

res han sido planteados los ejemplos en coordenadas globales, veremos mas adelante que en general es preferible trabajar en un sistema propio del elemento.

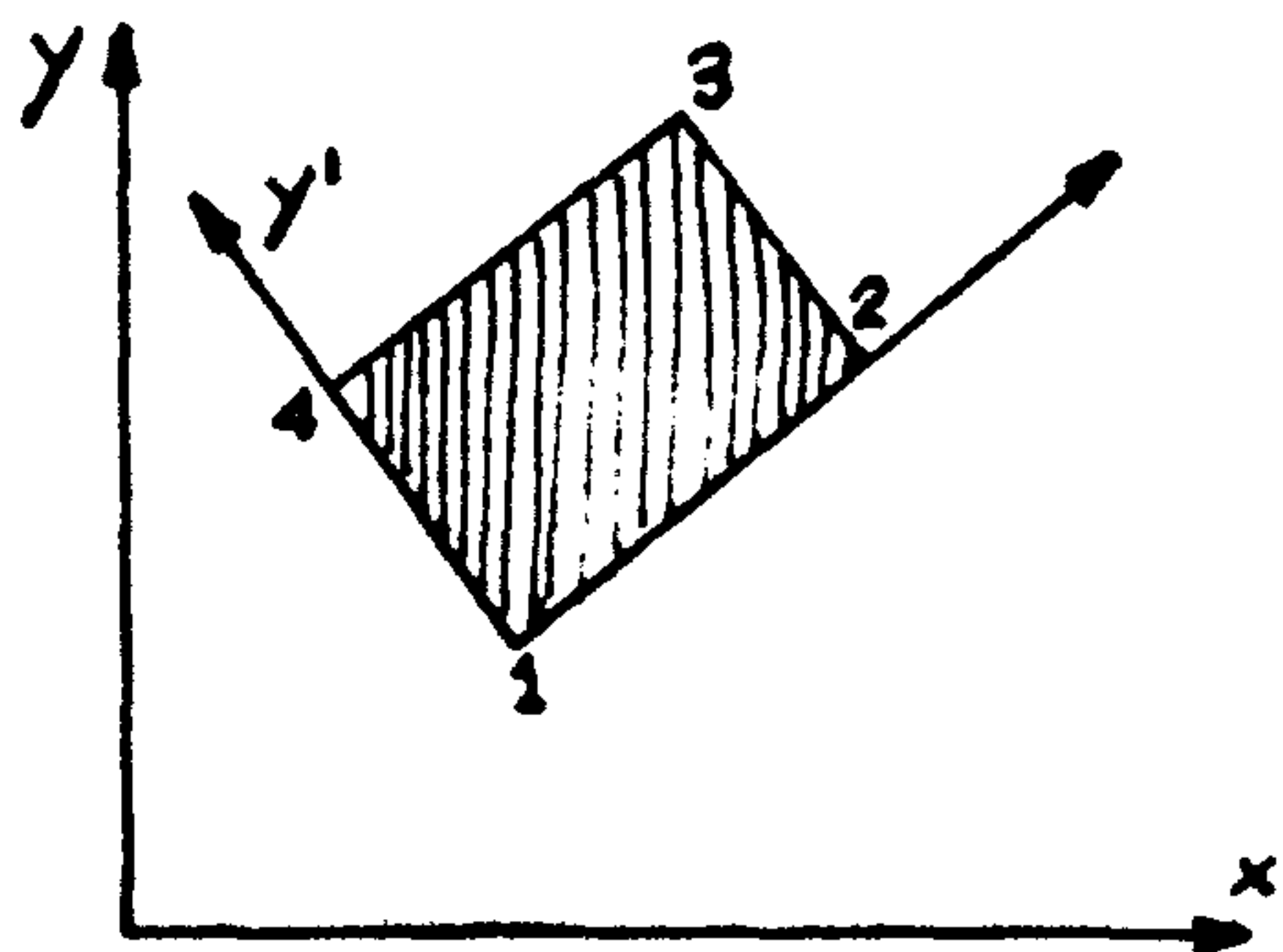


FIG. 2.7.

En el caso del rectángulo de la figura en cada nodo se cumple

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X' \\ Y' \end{Bmatrix}; \quad \underline{X'} = \underline{L}_D^T \underline{X}$$

donde \underline{L}_D es la matriz cuyas columnas son los cosenos directores de X' , Y' . Por ello el vector de cargas nodales del elemento será

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{L}_D & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L}_D & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_D & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{L}_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{Bmatrix}$$

ó bien

$$\underline{P} = \underline{L} \underline{P'}$$

Analogamente

$$\underline{\delta'} = \underline{L}^T \underline{\delta}$$

de modo que, en coordenadas globales

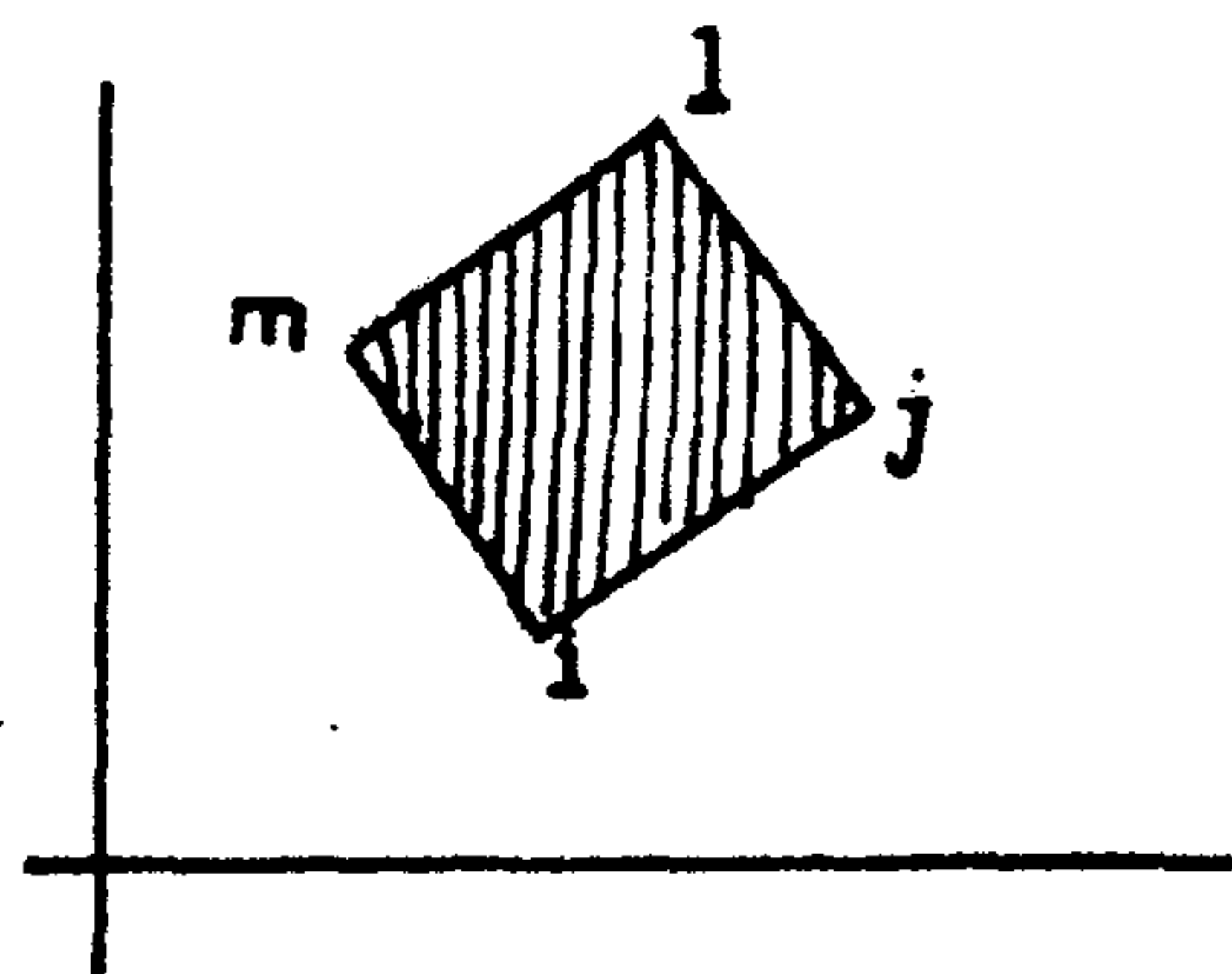
$$\underline{P} = \underline{L} \underline{P}' = \underline{L} \underline{k}' \underline{\delta}' = \underline{L} \underline{k}' \underline{L}^T \underline{\delta}$$

$$\underline{k} = \underline{L} \underline{k}' \underline{L}^T$$

(2.34)

que es la misma expresión de que se disponia en cálculo de -
estructuras.

Conociendo la matriz de rigidez en globales
su contribución a la matriz general se realiza según el esque



ma del método directo.

En el ejemplo de la figura 2.8
seria

$$\begin{array}{cccc}
 & \dots & j & \dots & j & \dots & l & \dots & m & \dots \\
 i & \dots & k_{ii} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{il} & \dots & k_{im} & \dots \\
 j & \dots & k_{ji} & \dots & k_{jj} & \dots & k_{jl} & \dots & k_{jm} & \dots \\
 l & \dots & k_{li} & \dots & k_{lj} & \dots & k_{ll} & \dots & k_{lm} & \dots \\
 m & \dots & k_{mi} & \dots & k_{mj} & \dots & k_{ml} & \dots & k_{mm} & \dots
 \end{array}$$

donde k_{pq} es de (2 x) y representa las correspondientes sub
matrices de la matriz elemental en globales.

En general cada submatriz será de orden correspondiente al número de grados de libertad fijados para cada nodo y habrá tantas como nodos tenga el elemento.

Conviene hacer notar que el método no sufre alteración si se superponen efectos de elementos con diferente número de nodos; siempre, claro está, que los campos de movimientos supuestos sean concordantes.

También conviene recapacitar en el hecho de que es posible sumar contribuciones debido a que la expresión (2.31) del teorema de los trabajos virtuales, maneja cantidades bajo el signo integral. En lugar de

$$\int_D \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dv = \int_D \underline{u}^T \underline{X}_t dv + \int_{\partial D} \underline{u}^T \cdot \underline{T} da \quad (2.28)$$

puede manejarse

$$\sum_{e=1}^N \int_{De} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dv = \sum_{e=1}^N \int_{De} \underline{u}^T \underline{X}_t dv + \sum_{e=1}^N \int_{De} \underline{u}^T \cdot \underline{T} da \quad (2.35)$$

donde N es el número de elementos en que se subdivide el dominio.

En la comparación de las expresiones (2.28) y (2.35) radica la diferencia conceptual entre el método de Rayleigh-Ritz y el F.E.M. En aquél se aproximan los movimien-

tos en el dominio total D para lo que se usa (2.28). En el F. E.M. se aproximan los movimientos en los dominios elementales D_e que resultan tras la discretización de aquél. La diferencia de éxito radica en que, de esta última forma, se pueden aproximar mejor las condiciones de contorno, como se comprende en forma intuitiva.

Lección 3.

ELEMENTOS Y FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

Introducción.

1. Forma de los elementos
2. Forma y tipo de nodos
3. Número y tipo de variables nodales
4. Funciones de interpolación
 - 4.1. Coordenadas naturales
 - 4.1.1. Elementos monodimensionales
 - 4.1.2. Elementos bidimensionales
 - 4.1.3. Elementos tridimensionales
 - 4.2. Interpolación
 - 4.3. Familias C^0 bidimensionales
 - 4.4. Familias C^0 tridimensionales
 - 4.5. Familias C^1 . Placas
5. Elementos isoparamétricos
6. Elementos incompatibles

Lección 3.

ELEMENTOS Y FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN

Una vez establecida la discretización (elementos, nodos, variables nodales y funciones de forma) el F.E.M. sigue un proceso tipo especificado en los capítulos anteriores.

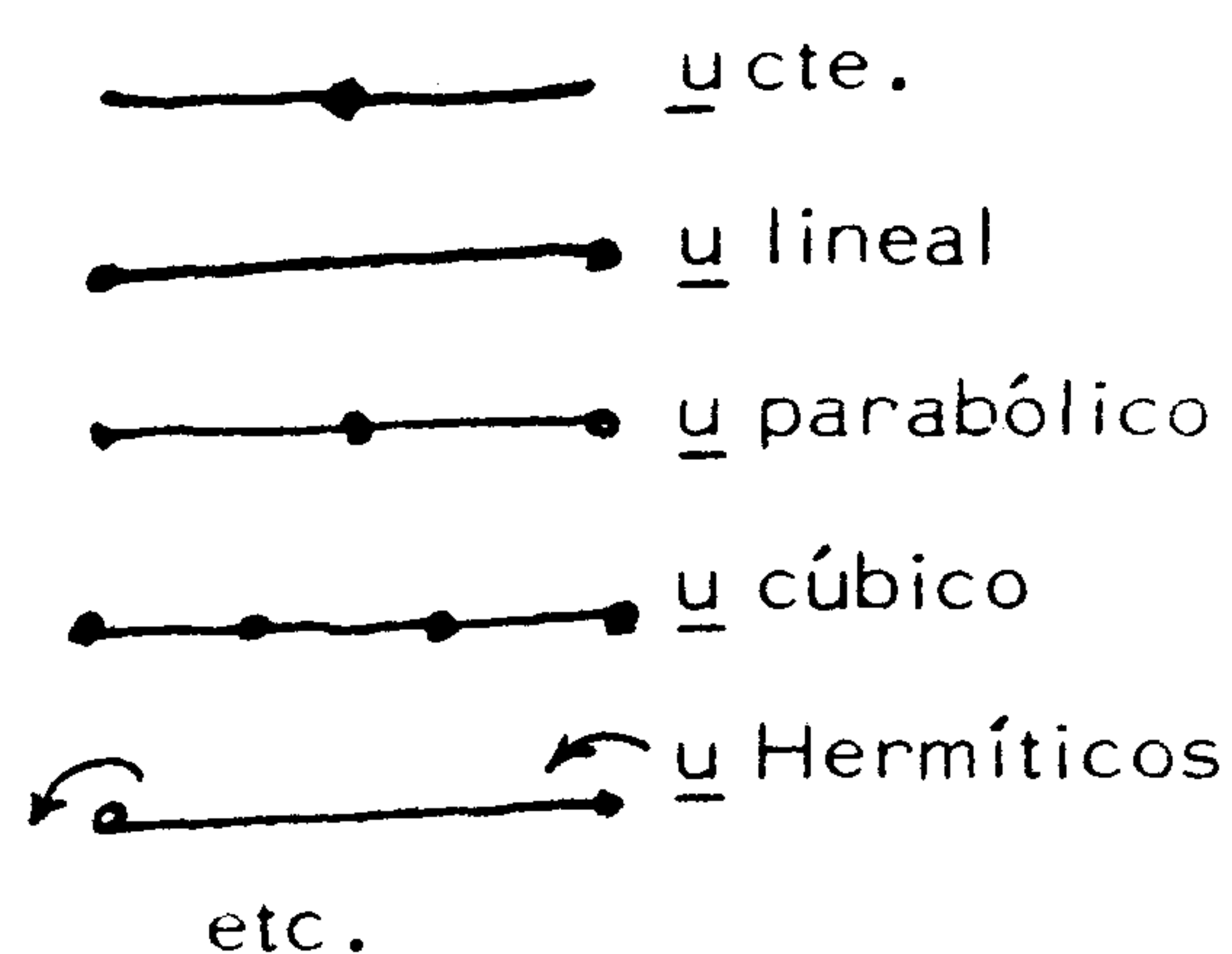
El punto más importante es pues la elección del elemento, concepto en el que se engloban

- a) la forma
- b) número y tipo de nodos (exteriores, interiores)
- c) número y tipo de variables nodales
- d) funciones de forma (también llamadas funciones de interpolación o funciones aproximantes)

En este capítulo vamos a precisar alguno de estos conceptos.

3.1. La forma de los elementos.

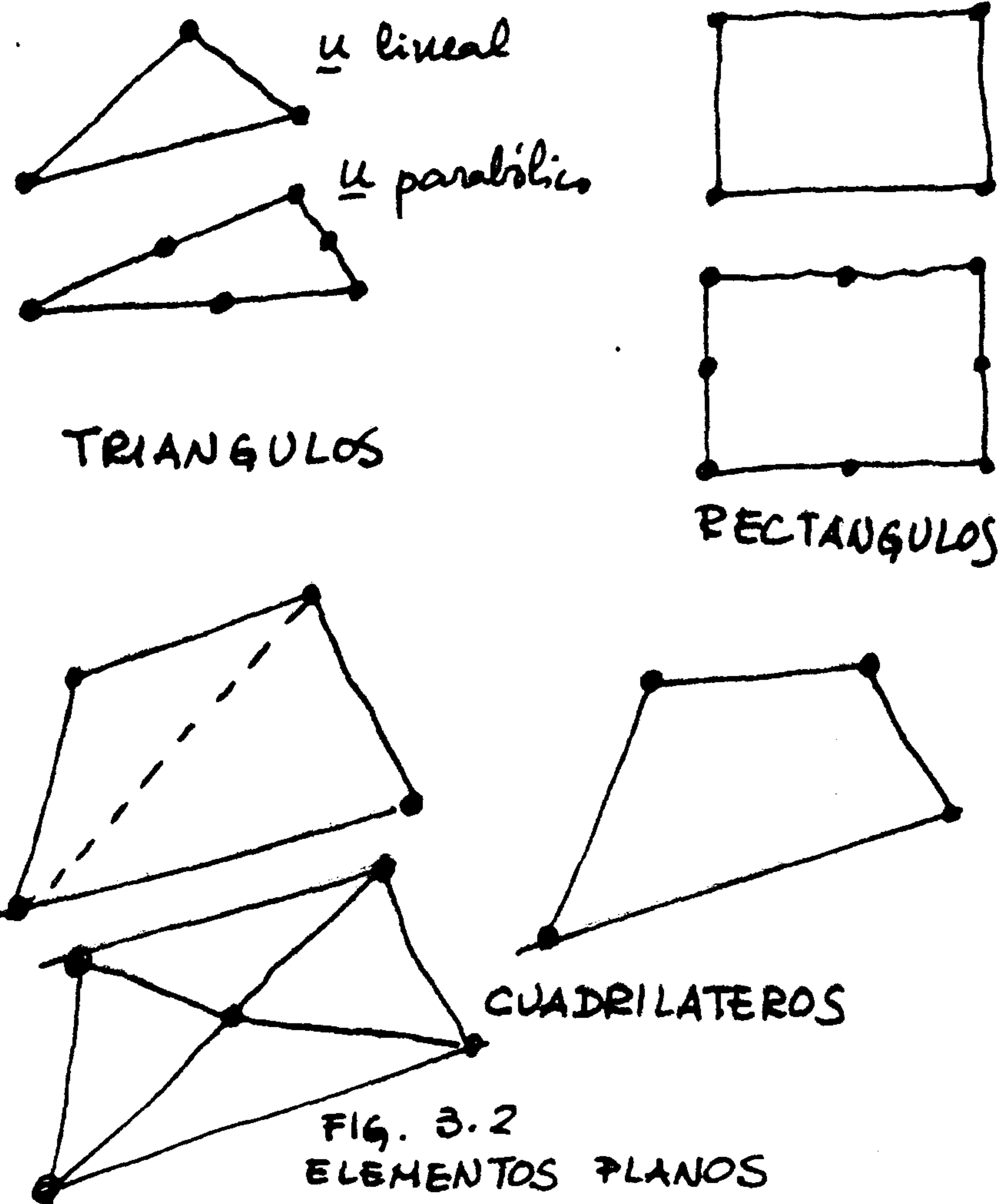
Depende del problema en estudio. En general se puede hablar de elementos de lados rectos y curvos.



En elementos monodimensionales se puede seguir fácilmente la evolución que será generalizable a posteriori. Además de en problemas de barras dichos elementos son útiles cuando se estudian problemas planos como placas con rigidizadores.

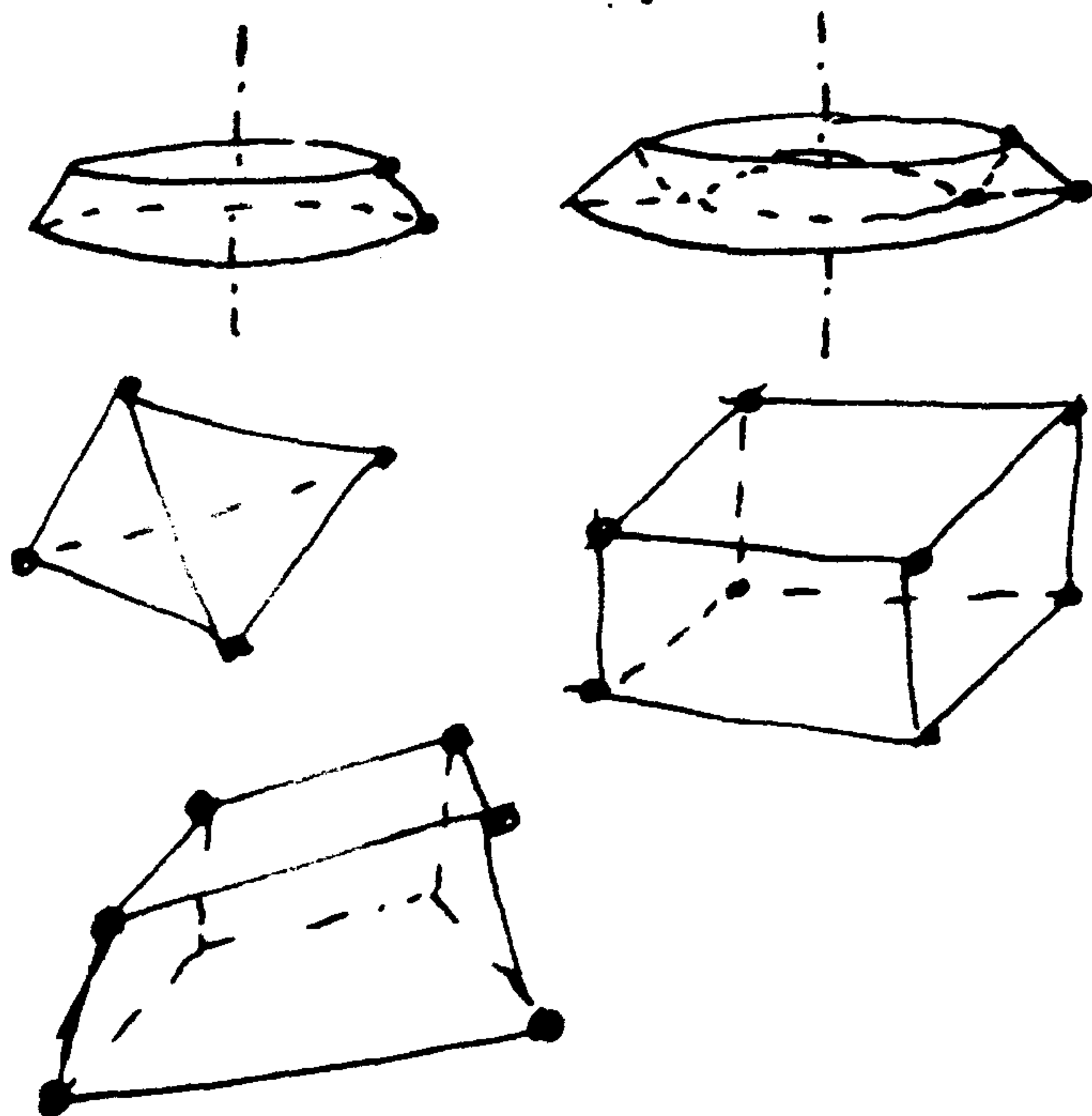
Fig.3.1
Elementos monodimensionales

El tipo básico en dos dimensiones es el triángulo por su versatilidad para acomodarse a contornos variables.



El rectángulo es muy útil ya que su generación es muy fácil y en ciertos problemas aproxima bien la forma. Así como el cuadrilátero generado directamente o mediante superposición de triángulos. Si el número de éstos es cuatro es preciso realizar la condensación, a nivel elemental, del nodo interno.

En tres dimensiones cabe hablar de los elementos axisimétricos mono y bidimensionales. Del tetraedro y el paralelepípedo -



como generalización del triángulo y rectángulo y del exaedro como generalización del cuadrilátero. El exaedro puede degenerar en tetraedros o ser generado mediante 5 tetraedros

FIG. 3.3. ELEMENTOS TRIDIMENSIONALES

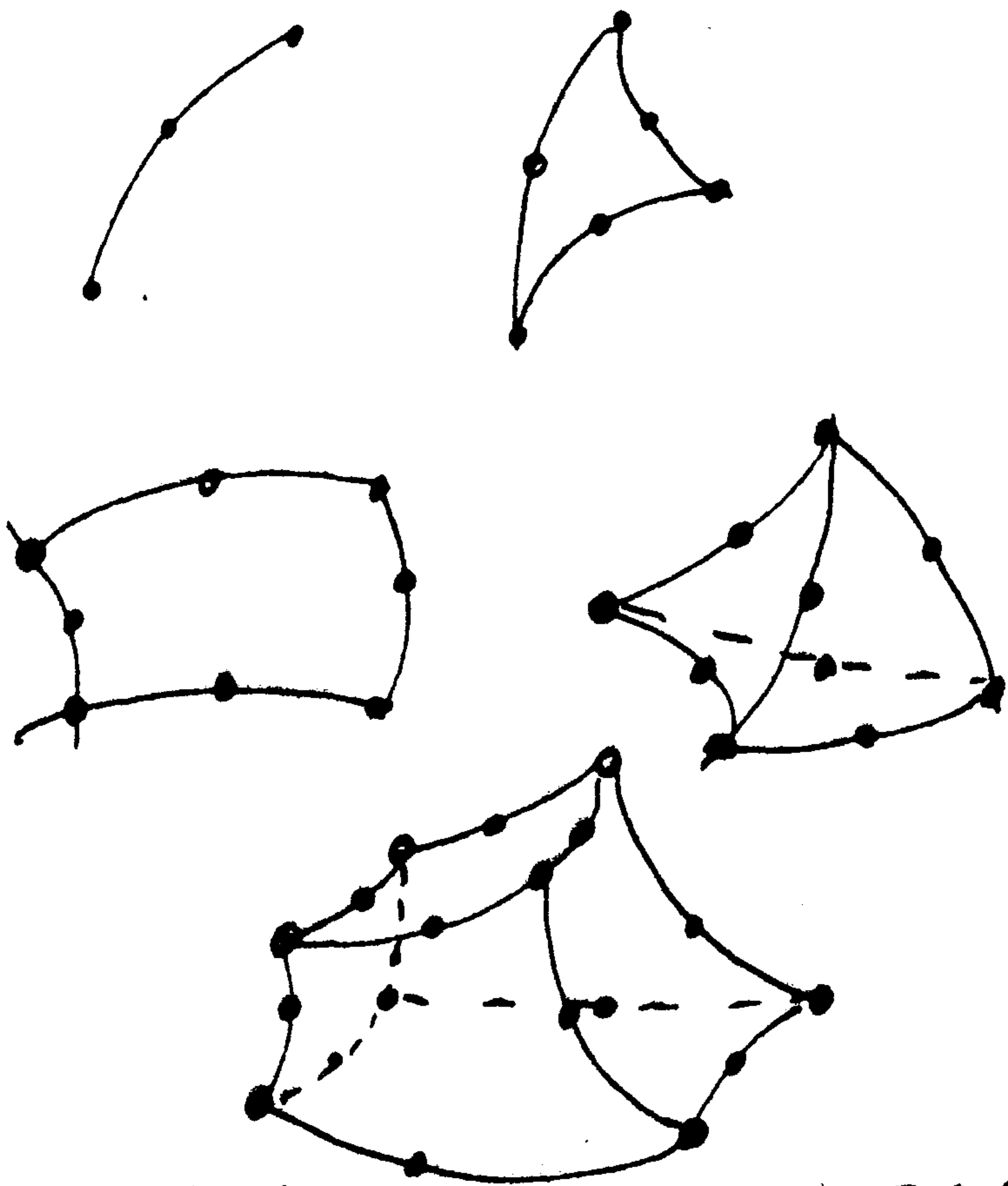


FIG. 3.5. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS PARA PARABÓLICOS

la generación de cuadriláteros a partir de triángulos. En ciertos casos nodos aparentemente "interiores" no son tales; un ejemplo sería el acoplamiento de elementos monodimensionales parabólicos con otros bidimensionales de la misma familia.

3.3. Número y tipo de variables nodales.

Se trata, nuevamente de un concepto amplio. En un problema bidimensional con aproximación parabólica cabría usar el triángulo de 6 nodos con 2 variables nodales (movimientos) o bien triángulos de tres nodos con 4 variables -

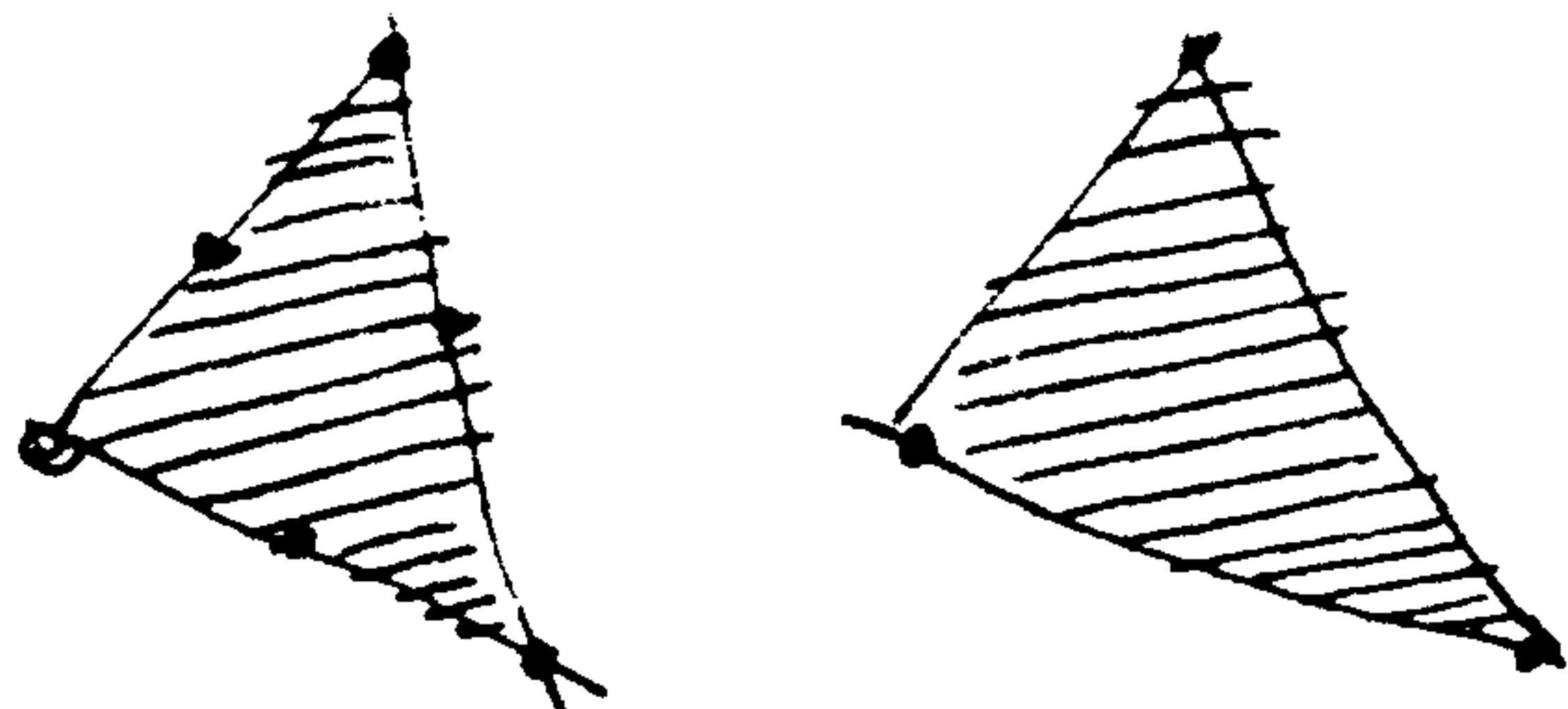


FIG. 3.6

Todos los tipos anteriores pueden ser trasladados, mediante el concepto isoparamétrico, a geometrias curvas, con lo cual la aproximación obtenida es mucho más efectiva.

3.2. Número y tipo de nodos

Este concepto está íntimamente relacionado con la elección de las funciones de forma, aunque en algunos casos la presencia de nodos internos puede ser un auxiliar operativo como se observa en la figura 3.2 para

los de tres nodos con 4 variables - nodales (movimientos y dos de sus derivadas). En cualquier caso el producto del número de nodos por

el de variables nodales conduce al concepto de grados de libertad del elemento.

3.4. Funciones de interpolación.

Se trata del tema más importante y al que dedicaremos el núcleo de esta lección. En general la interpolación se hace mediante polinomios aunque en algunos casos (banda finita, elementos de dimension infinita, etc.) se recurre a funciones trigonométricas.

Polinomios monodimensionales

$$P_n(x) = \alpha_i x^i = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$$

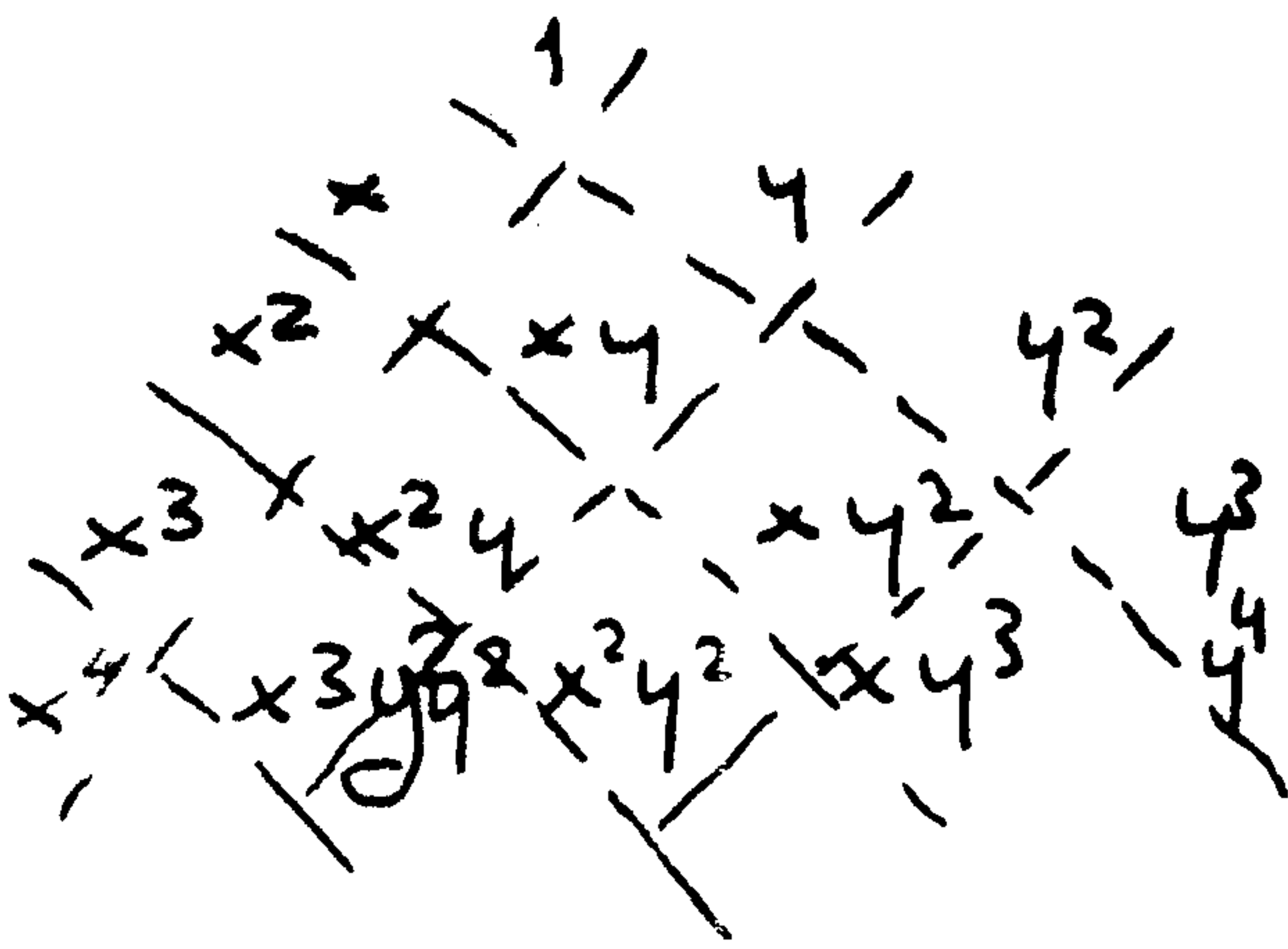
$$T_n = n + 1$$

- 1 cte(1)
- x lin(2)
- x² cuad(3)
- x³ cub(4)
- ⋮

Polinomios bidimensionales

$$P_n(x,y) = \alpha_k x^i y^j \left\{ \begin{array}{l} i + j \leq n \\ T_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{array} \right.$$

- cte 1
- lineal 3
- cuad 6
- cub 10
- cuart 15
- ⋮



Polinomios tridimensionales

$$P_4(x,y,z) = \alpha_i x^i y^j z^k \left\{ \begin{array}{l} i + j + k \leq n \\ T_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \end{array} \right.$$

cte 1
 lineal 4
 parabr. 10
 cub. 20
 etc.

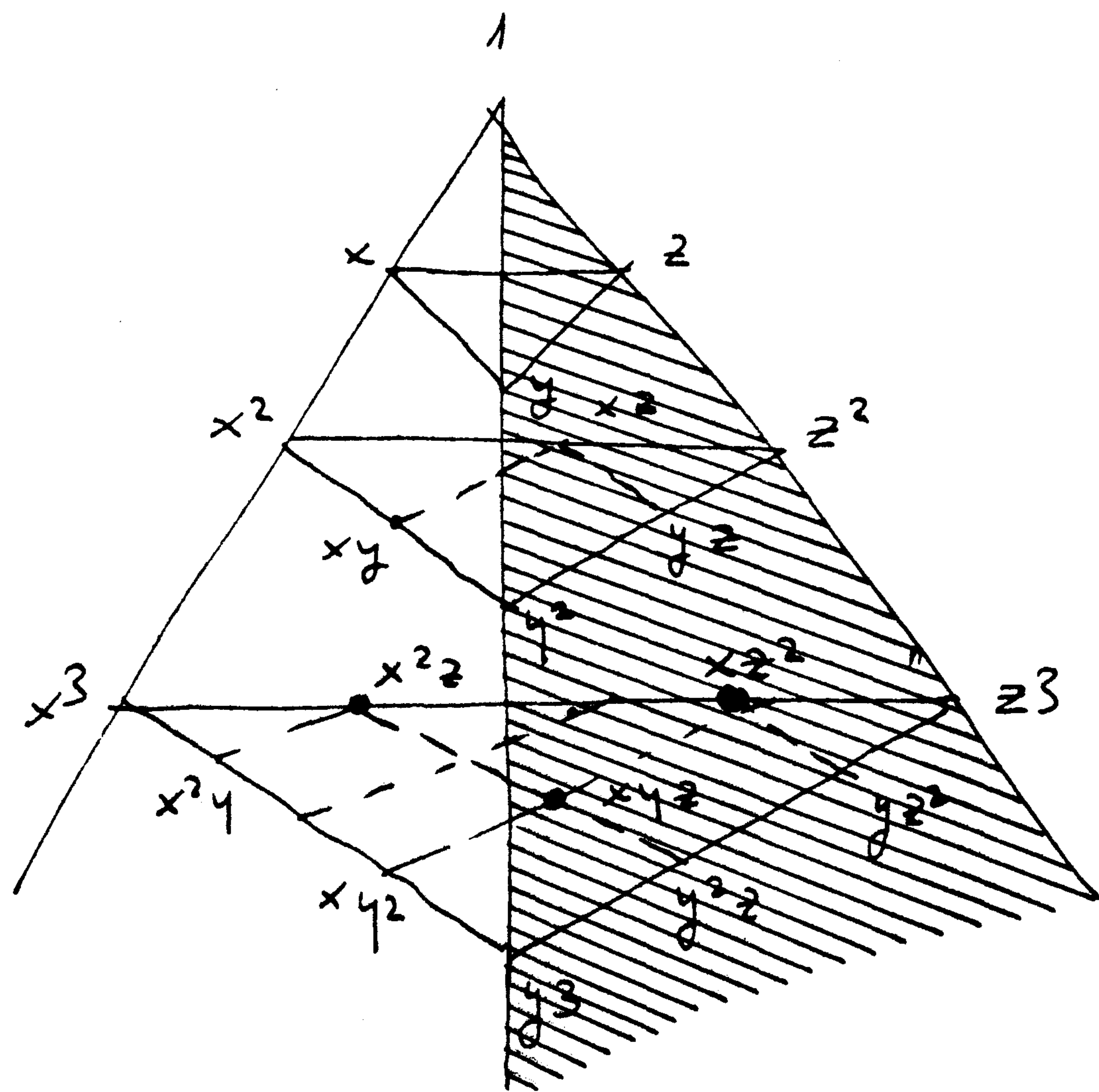


Fig. 3.7

Además del incremento de aproximación que puede dictar la elección de uno u otro tipo de polinomio, conviene indicar la existencia de dos condiciones necesarias para la convergencia.

Si el orden de la mayor derivada que aparece en las integrales de campo es $n + 1$ dichas condiciones son

Condición de compatibilidad interelemental

Entre elementos la función aproximante debe ser C^n como mínimo.

Condición de complitud

Dentro de cada elemento la función aproximante debe ser C^{n+1} .

Finalmente conviene fijar la necesidad de la isotropía geométrica en el polinomio, de modo que este preserve su orden y estructura en cualquier transformación lineal. Para ello es preciso

- a) que el polinomio sea completo , ó
al menos b) que no existan términos asimétricos.

Evidentemente no sería esperable una buena aproximación a la realidad si la representación de la variable de campo dependiese de la orientación del sistema de referencia.

Dos desarrollos admisibles serían por ejemplo :

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_4 x y$$

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_5 y^2$$

simétricos pero incompletos respecto a la aproximación cuadrática

$$P_n = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 x y + a_5 y^2$$

Según se indicó en capítulos anteriores frente al planteamiento en coordenadas generalizadas vg.

$$u = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \dots$$

conviene el planteamiento en variables nodales

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{u}^e$$

que admiten una interpretación física. Además se advirtió que es interesante plantearse la determinación directa de las funciones de forma. Para ello vamos a introducir algún concepto nuevo.

3.4.1. Coordenadas naturales.

Consideremos el triangulo de la figura definido por los vectores de sus v rtices \underline{x}_1 \underline{x}_2 \underline{x}_3 respecto a un sistema global de coordenadas.

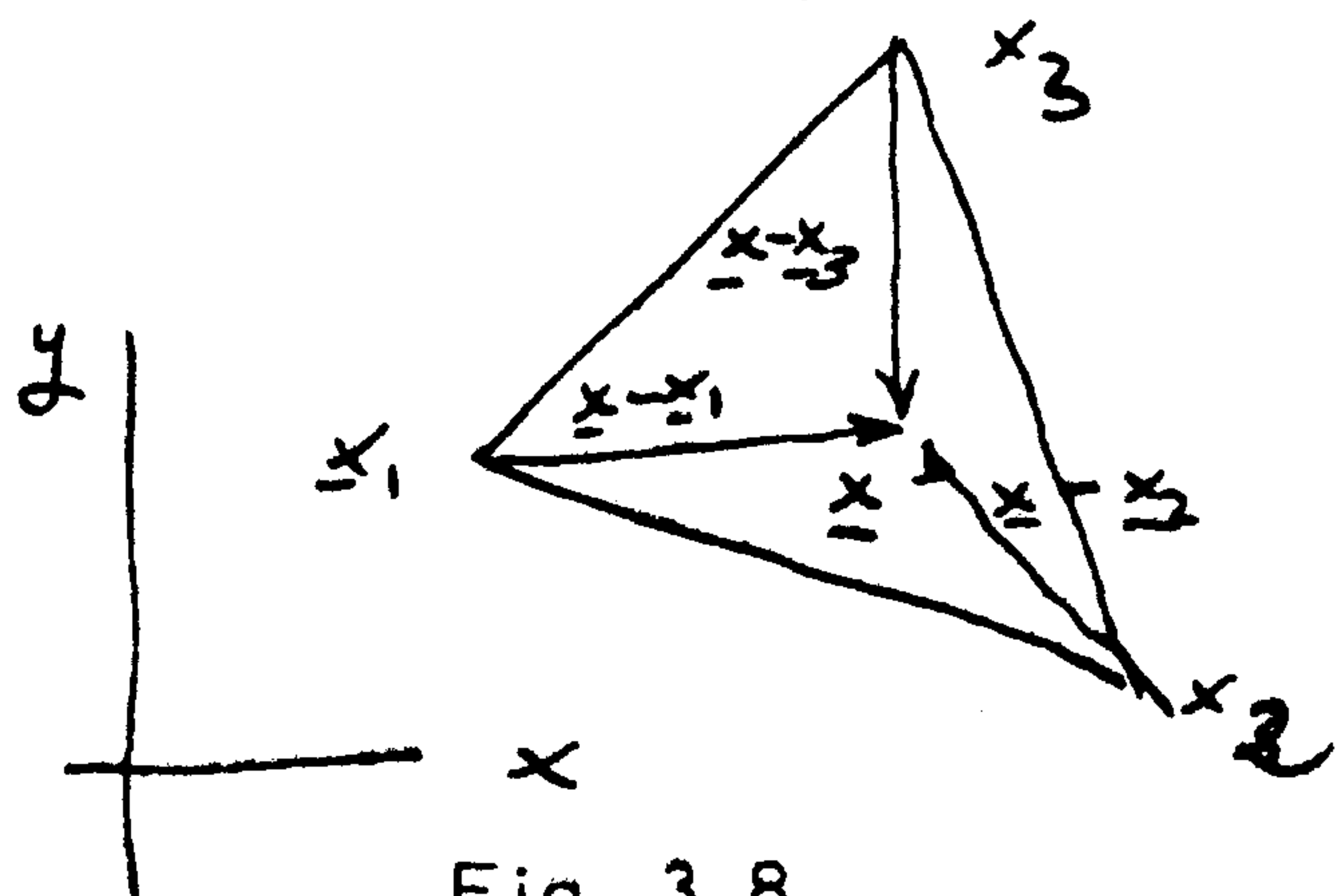


Fig. 3.8

Un punto interior \underline{x} define tres vectores que, al ser coplanarios, son linealmente dependientes

$$a_1 (\underline{x} - \underline{x}_1) + a_2 (\underline{x} - \underline{x}_2) + a_3 (\underline{x} - \underline{x}_3) = 0$$

$$(a_1 + a_2 + a_3) \underline{x} = a_1 \underline{x}_1 + a_2 \underline{x}_2 + a_3 \underline{x}_3$$

$$\underline{x} = \frac{a_1}{\sum a_j} \underline{x}_1 + \frac{a_2}{\sum a_j} \underline{x}_2 + \frac{a_3}{\sum a_j} \underline{x}_3 \quad \dots (3.1)$$

Si llamamos

$$\xi_1 = \frac{a_1}{\sum a_j} \quad \xi_2 = \frac{a_2}{\sum a_j} \quad \xi_3 = \frac{a_3}{\sum a_j} \quad \dots (3.2)$$

cada punto interior puede definirse en función de los nodos mediante tres coordenadas

$$\underline{x} = \xi_1 \underline{x}_1 + \xi_2 \underline{x}_2 + \xi_3 \underline{x}_3 \quad \dots (3.3)$$

que no son independientes puesto que

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \quad \dots (3.4)$$

(3.3) y (3.4) pueden sintetizarse en

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad \dots (3.5)$$

que al ser invertida produce

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad \dots (3.6)$$

donde A es el area del triangulo y 2A el determinante de (3.5).

En el vertice 1

$$\xi_1 = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + y_2 x_1 - y_3 x_1 + x_3 y_1 - x_2 y_1] = \frac{2A}{2A} = 1$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_2 y_2 - x_2 y_3 + y_2 x_3 - y_2 x_2] = 0 =$$

$$\xi_3 = 0$$

Analogamente

en el vertice 2

$$\xi_1 = \xi_3 = 0 \quad \xi_2 = 1$$

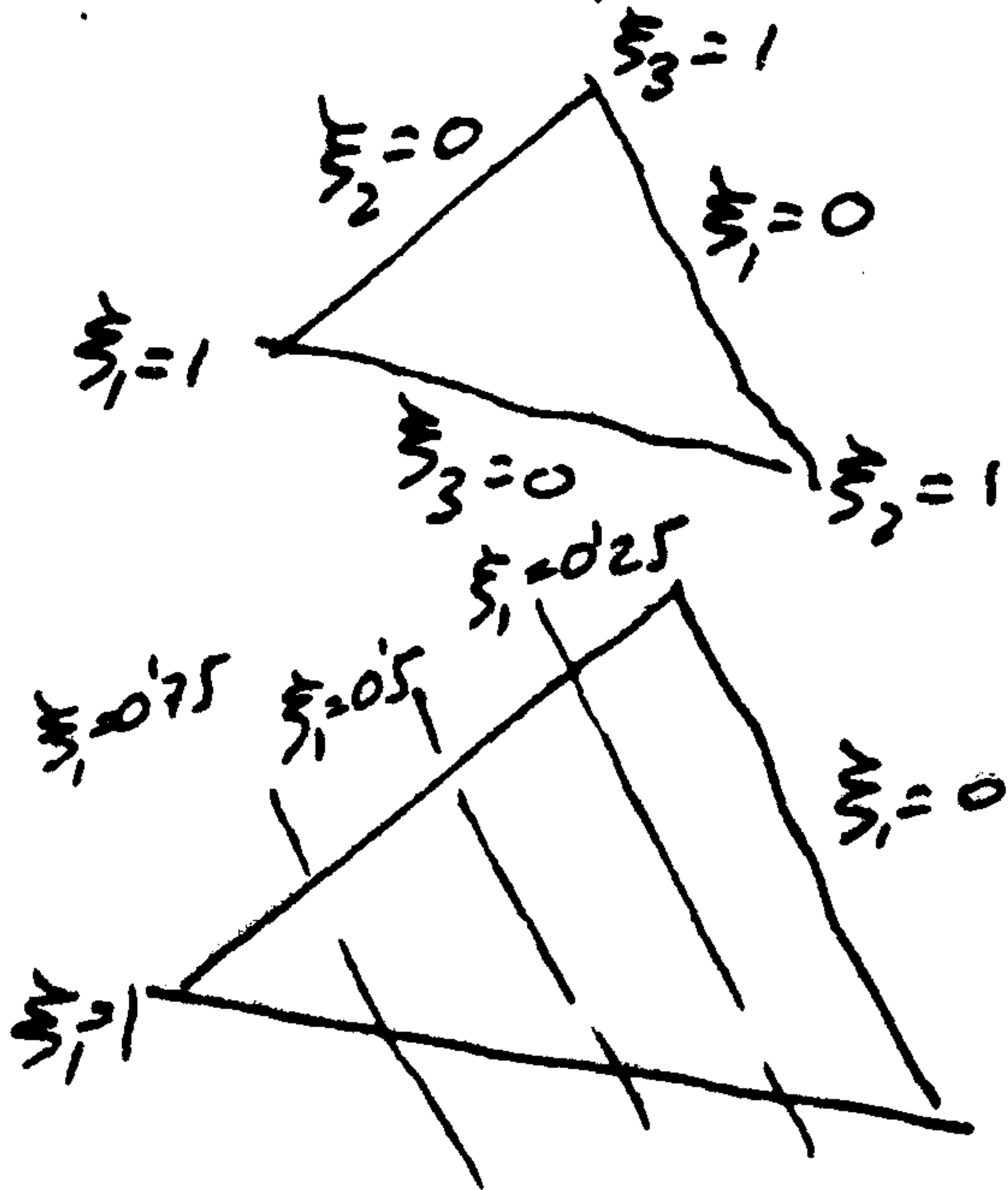
en el vertice 3

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad \xi_3 = 1$$

Debido a la variación lineal expresado en (3.6)

obtenemos :

- a) que el campo de variación de las ξ_i es $\langle 0, 1 \rangle$
 b) que las cotas de dicho campo se dan en vertices y lados opuestos dos a dos.



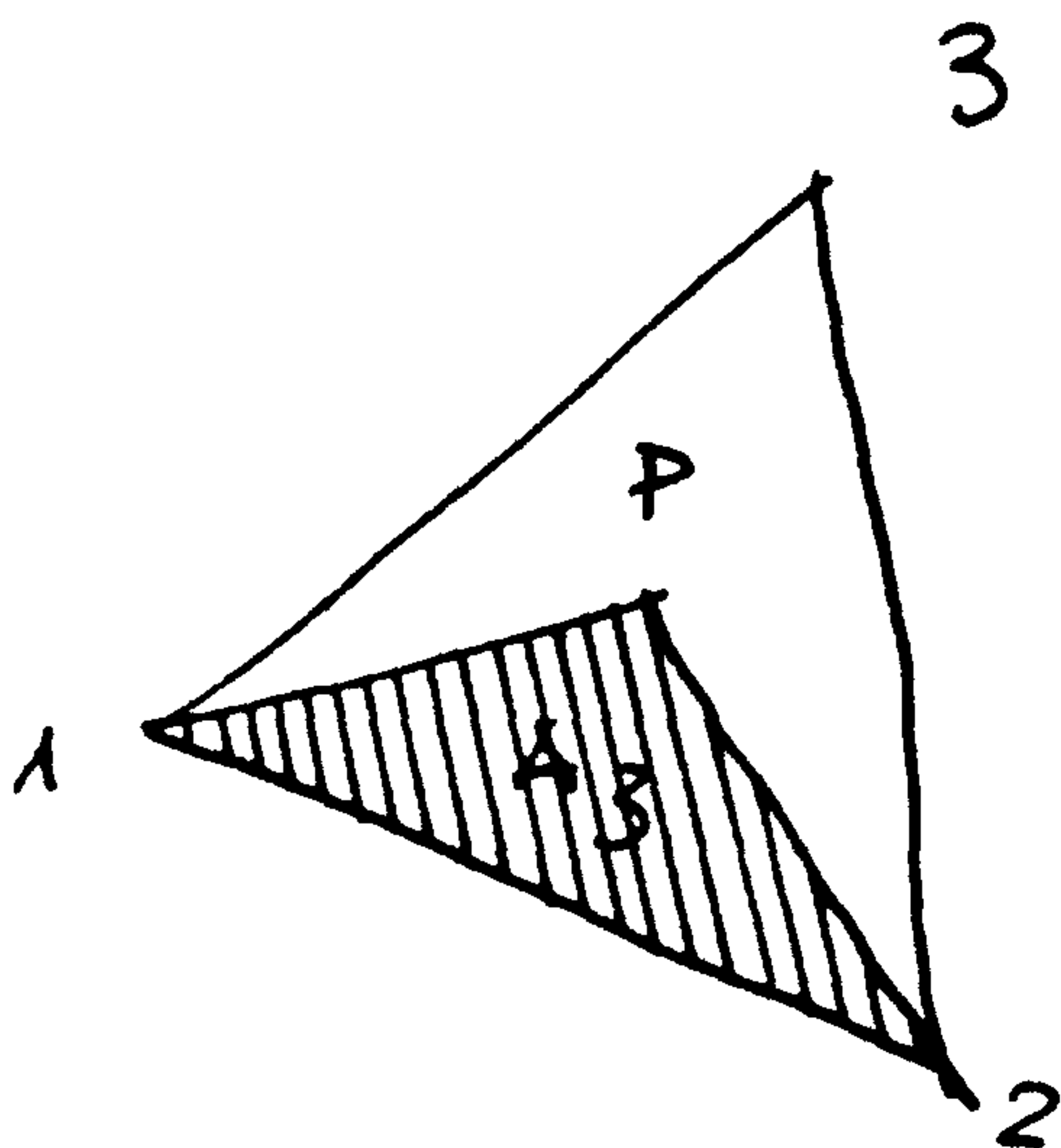
- c) el caracter lineal de (3.6) implica que las líneas de nivel de cada ξ_i son paralelas a los lados opuestos al vertice i .

- d) Comparando con la definición de funciones de forma lineales vemos una analogía completa entre cada ξ_i y cada N_i .

Otra interpretación que se pretende a veces consiste en observar que cada ξ_i es el área relativa definida entre el punto en estudio y el lado opuesto al vertice i .

En efecto, vg.

$$\xi_3 = \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)] =$$



$$= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \end{vmatrix} = \frac{2A_3}{2A} = \frac{A_3}{A}$$

Así pues

$$\xi_i = \frac{A_i}{A}$$

$$\sum \xi_i = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A}$$

... (3.7)

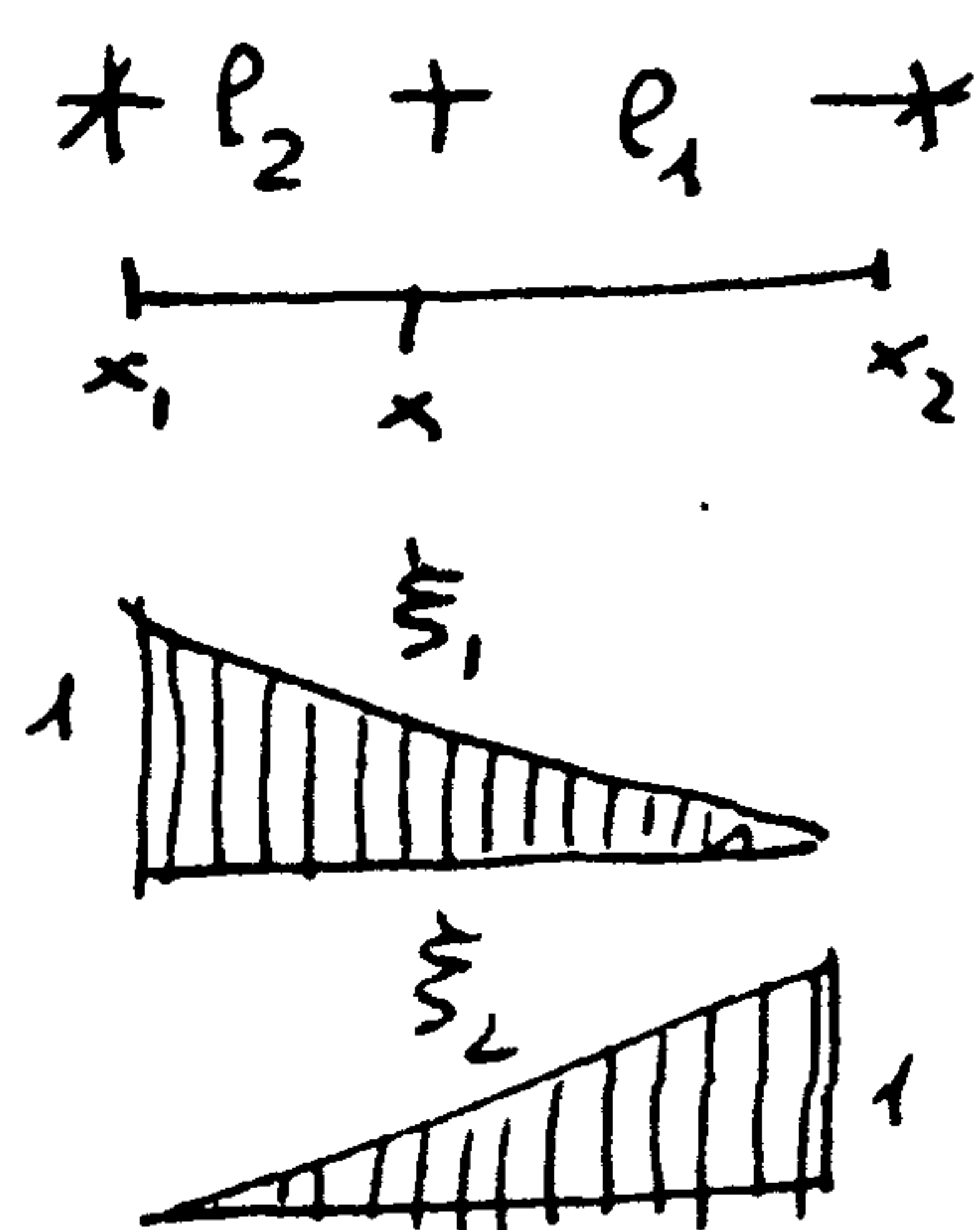
por lo que, en geometría proyectiva dichas coordenadas se llaman areolares.

Este tipo de coordenadas es, pues, del mayor interés, por las siguientes razones

- 1) El sistema de coordenadas ξ_i es puramente local
- 2) Todos los cálculos se realizan en un campo de variabilidad normalizado a la unidad ya que $0 \leq \xi_i \leq 1$.
- 3) Las ξ_i son precisamente las funciones de interpolación necesarias en la hipótesis $\underline{u} = \underline{N} \underline{\delta}^e$. básica del F.E. M. para elementos lineales.

Un sistema de coordenadas de este tipo se llama natural y es básico para la cómoda derivación de las funciones de interpolación y su posterior extensión al caso de elementos isoparamétricos.

3.4.1.1. Elementos monodimensionales.



Evidentemente las coordenadas areolares son ahora "longitudinales" por lo que cabe tantear

$$\xi_1 = \frac{l_1}{L} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad \dots (3.8)$$

$$\xi_2 = \frac{l_2}{L} = - \frac{x_1 - x}{x_2 - x_1}$$

ó bien, si se mide desde $x_1 = 0$

$$\xi_1 = 1 - \frac{x}{L} \equiv N_1$$

$$\xi_2 = \frac{x}{L} \equiv N_2 = 1 - \xi_1$$

que produce de nuevo todas las características analizadas en el triángulo.

En el caso de una variación parabólica, se puede escoger como nodo intermedio el centro del segmento

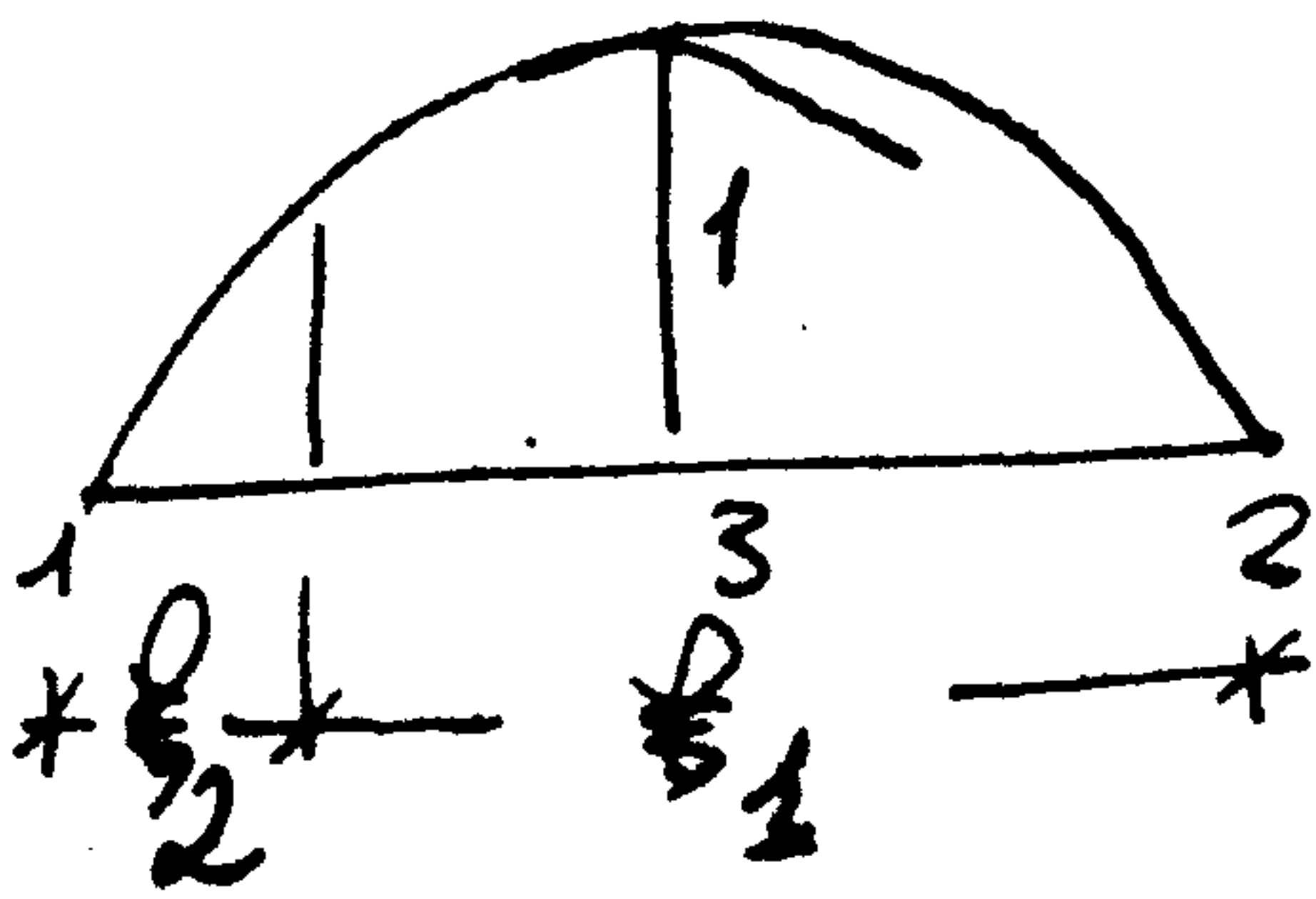


Fig. 3.12

to, en cuyo caso las funciones de forma pueden generarse a partir de las coordenadas nodales del siguiente modo.

Evidentemente, para N_3

$$N_3 = A x^2 + Bx$$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} & 1 = A \frac{L^2}{4} + B \frac{L}{2} \\ x = L & 0 = AL^2 + BL \end{cases}$$

$$\text{Sumando la 1ª y la 2ª } \times (-1/2) : 1 = A \left[\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{2} \right] ; A = \frac{-4}{L^2}$$

$$\text{Sumando la 1ª y la 2ª } \times (-1/4) : 1 = B \left[\frac{L}{2} - \frac{L}{4} \right] ; B = \frac{4}{L}$$

$$N_3 = -4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 4 \frac{x}{L} = 4 \frac{x}{L} \left[1 - \frac{x}{L} \right]$$

Así pues

$$N_3 = 4 \xi_1 \xi_2 \quad \dots (3.9)$$

Combinemos ahora ξ_1 con $-N_3/2$

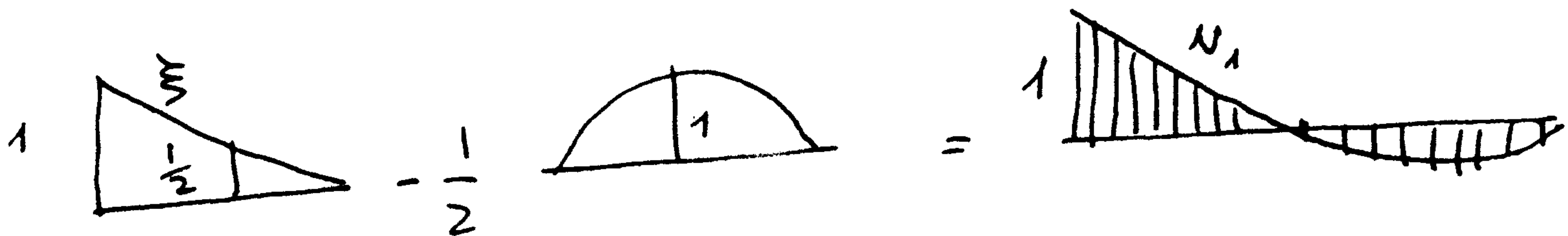


Fig. 3.13

el resultado reúne todas las características exigidas a N_1 así pues

$$N_1 = \xi_1 (1 - 2 \xi_2) = \xi_1 (2 \xi_1 - 1) \quad \dots (3.10)$$

De la misma forma

$$N_2 = \xi_2 (2 \xi_2 - 1)$$

... (3.11)

Finalmente, puede demostrarse que

$$\int_{x_1}^{x_2} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta dx = \frac{\alpha! \beta! (x_2 - x_1)}{(\alpha + \beta + 1)!}$$

...(3.12)

Algunos valores son

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta dx = \frac{A}{B}$$

$\alpha+\beta$	α	β	A	B
0	0	0	1	1
1	1	0	1	2
2	2	0	2	6
2	1	1	1	6
3	3	0	3	12
3	2	1	1	12
4	4	0	12	60
4	3	1	3	60
4	2	2	2	60
5	5	0	10	60
5	4	1	2	60
5	3	2	1	60
6	6	0	60	420
6	5	1	10	420
6	4	2	4	420
6	3	3	3	420

Estas integraciones serán necesarias cuando haya que obtener las matrices elementales, en cuyo caso convendrá operar en las coordenadas naturales.

3.4.1.2. Elementos bidimensionales.

Ya se ha visto en el comienzo del apartado la forma en que se definen las coordenadas areolares. Para las integraciones sobre un triángulo cabe utilizar

$$\int_{A^e} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A \quad \dots (3.13)$$

En cuadriláteros bidimensionales se establece una aplicación entre las coordenadas cartesianas y las naturales de un cuadrado

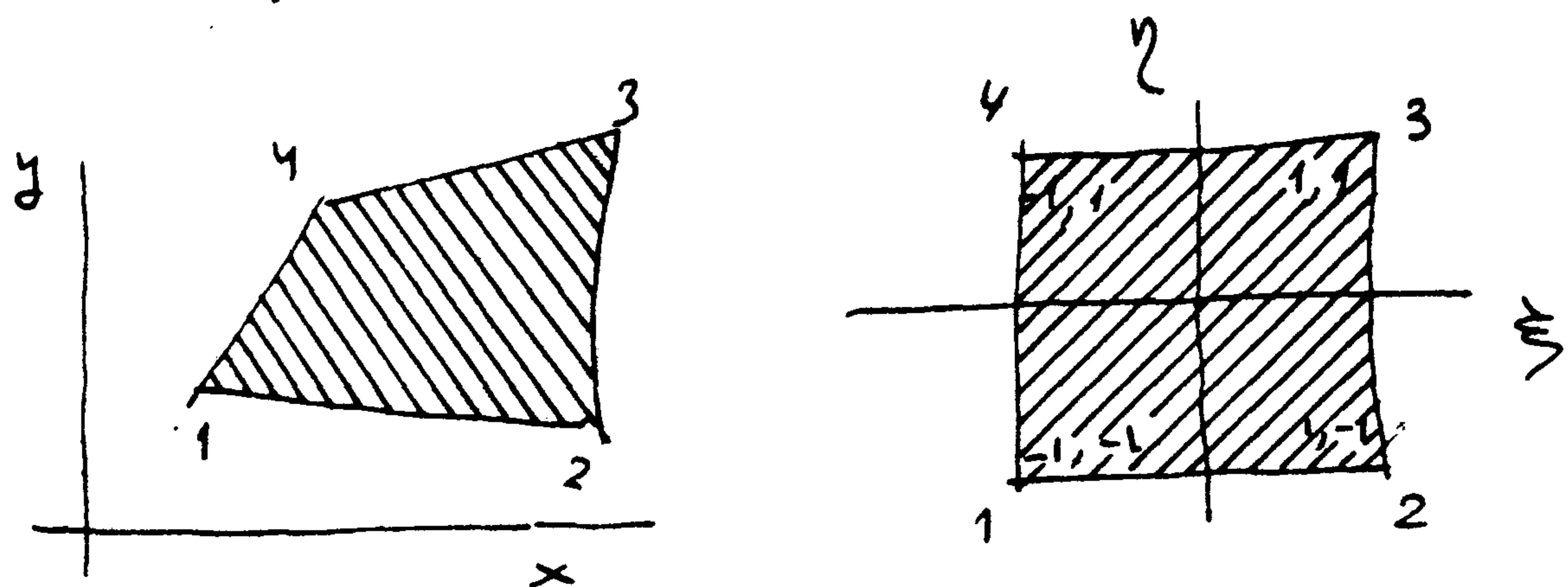


Fig. 3.14

Para ello se utiliza un sistema curvilíneo (ξ, η) relacionado con el (x, y) mediante una transformación

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta) \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad \text{lineal en el}$$

contorno para que los lados rectos sigan rectos.

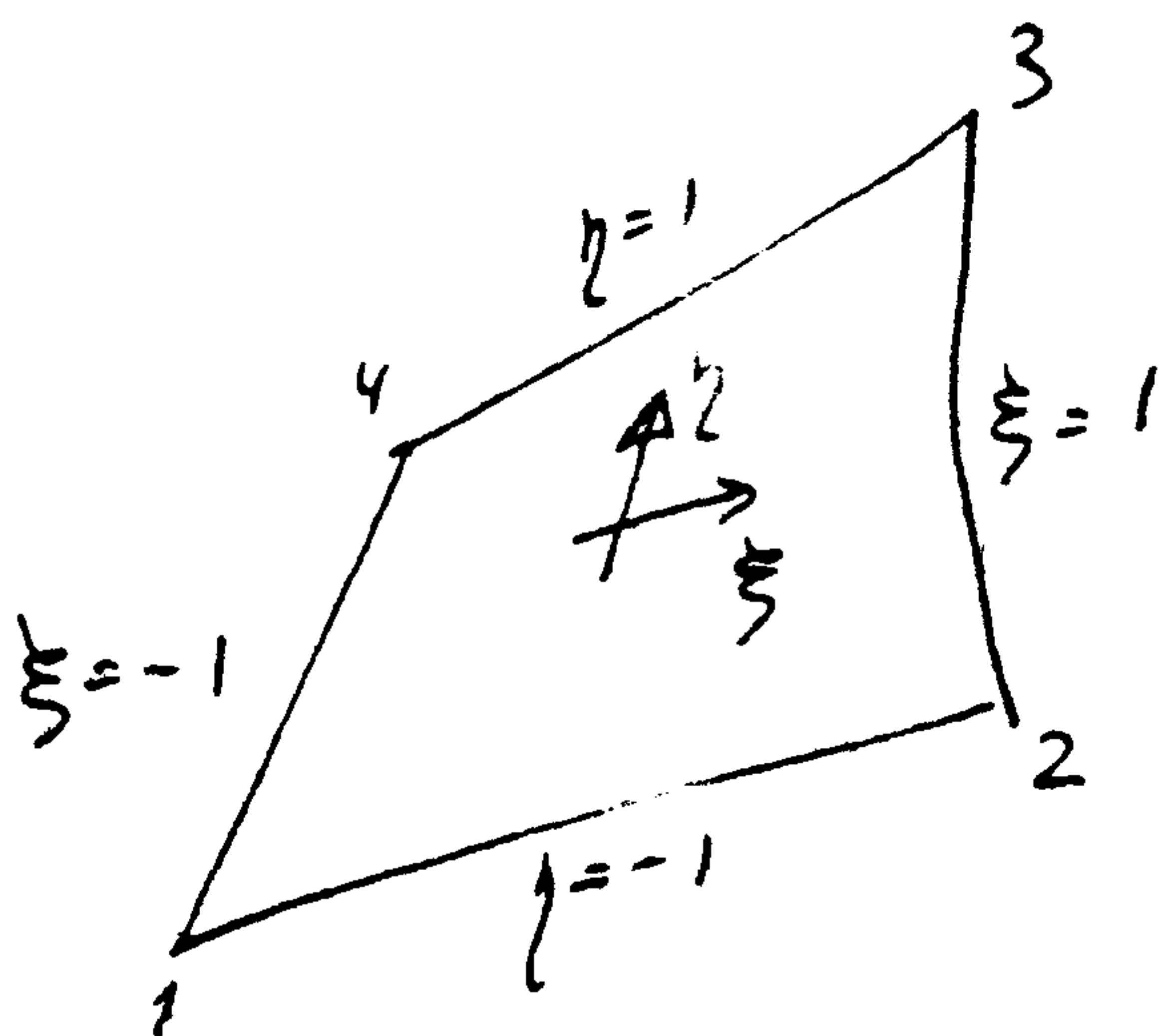


Fig. 3.15

Veamos primero como se trataria un rectángulo

$$\xi = \frac{x - x_{cdg}}{a} \quad \eta = \frac{y - y_{cdg}}{b} \quad \dots (3.14)$$

con lo que los limites son ± 1

En un lado 1 - 2

$$N_1' = \frac{1}{2} (1 - \xi)$$

$$N_1'' = \frac{1}{2} (1 - \eta)$$

de modo que una función adecuada seria

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) \quad \dots (3.15)$$

y, análogamente tendríamos

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) \quad \dots (3.16)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$$

En este caso las coordenadas naturales son inferidas a partir de las funciones de forma

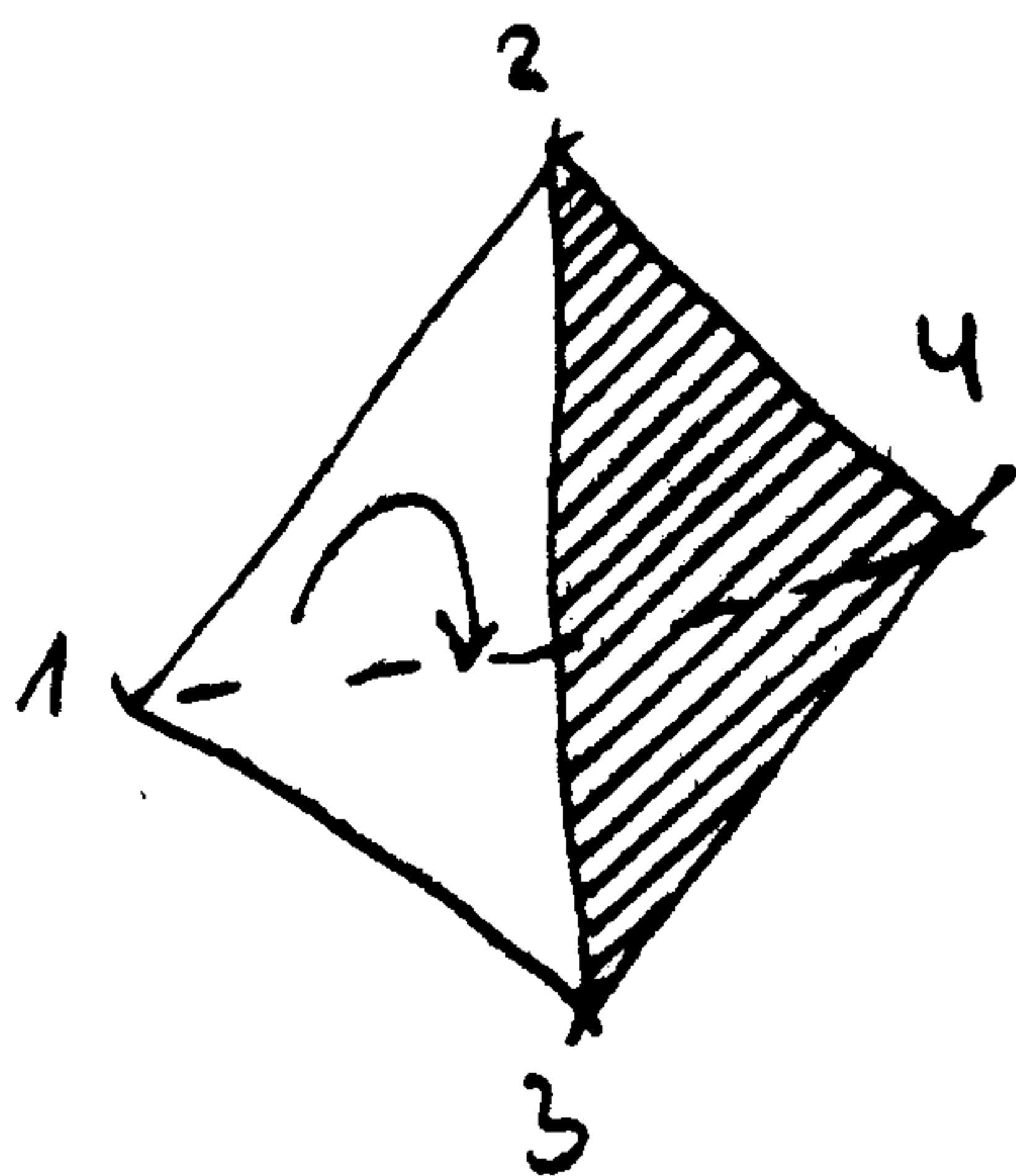
$$\begin{aligned} x &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1+\eta); (1-\xi)(1+\eta)] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y &= [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} [(1-\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1-\eta); (1+\xi)(1+\eta); (1-\xi)(1+\eta)] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

que es justamente la transformación que se necesitaba. Esta idea de expresar la geometria median

te las funciones de forma será explotada mas adelante al introducir el concepto de elementos isoparamétricos.

3.4.1.3. Elementos tridimensionales.

En elementos tridimensionales cabe definir coordenadas volumétricas en un tetraedro



$$\xi_i = \frac{V_i}{V}$$

...(3.18)

de la misma forma que se hacia con los triangulos en plano.

$$\xi_j = \frac{1}{6v} (2 v_j^0 + a_j x + b_j y + c_j z) \quad j=1,2,3,4$$

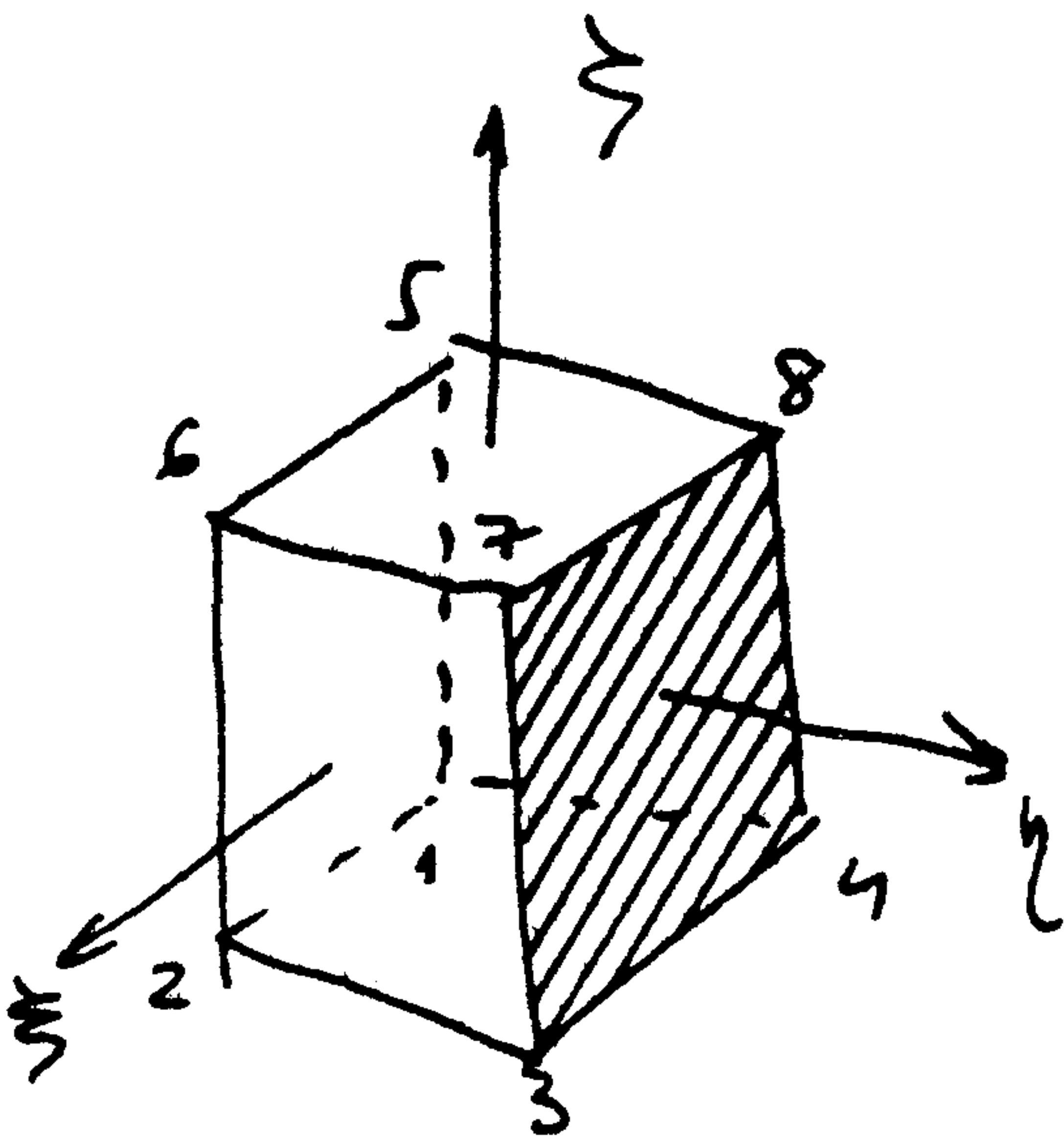
$$6V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_j &= (z_k y_l - z_l y_k) + (z_l y_m - z_m y_l) + (z_m y_k - z_k y_m) \\ b_j &= (z_k x_l - z_l x_k) + (z_l x_m - z_m x_l) + (z_m x_k - z_k x_m) \\ c_j &= (y_k x_l - y_l x_k) + (y_l x_m - y_m x_l) + (y_m x_k - y_k x_m) \end{aligned}$$

En cuyo caso

$$\int_v \xi_1^i \xi_2^j \xi_3^k \xi_4^l dv = 6 v \frac{i! j! k! l!}{(i + j + k + l + 3)!}$$

... (3.19)



Del mismo modo un exaedro generalizado se define mediante

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 x_i \xi_i \\ y &= \sum_{i=1}^8 y_i \xi_i \\ z &= \sum_{i=1}^8 z_i \xi_i \end{aligned}$$

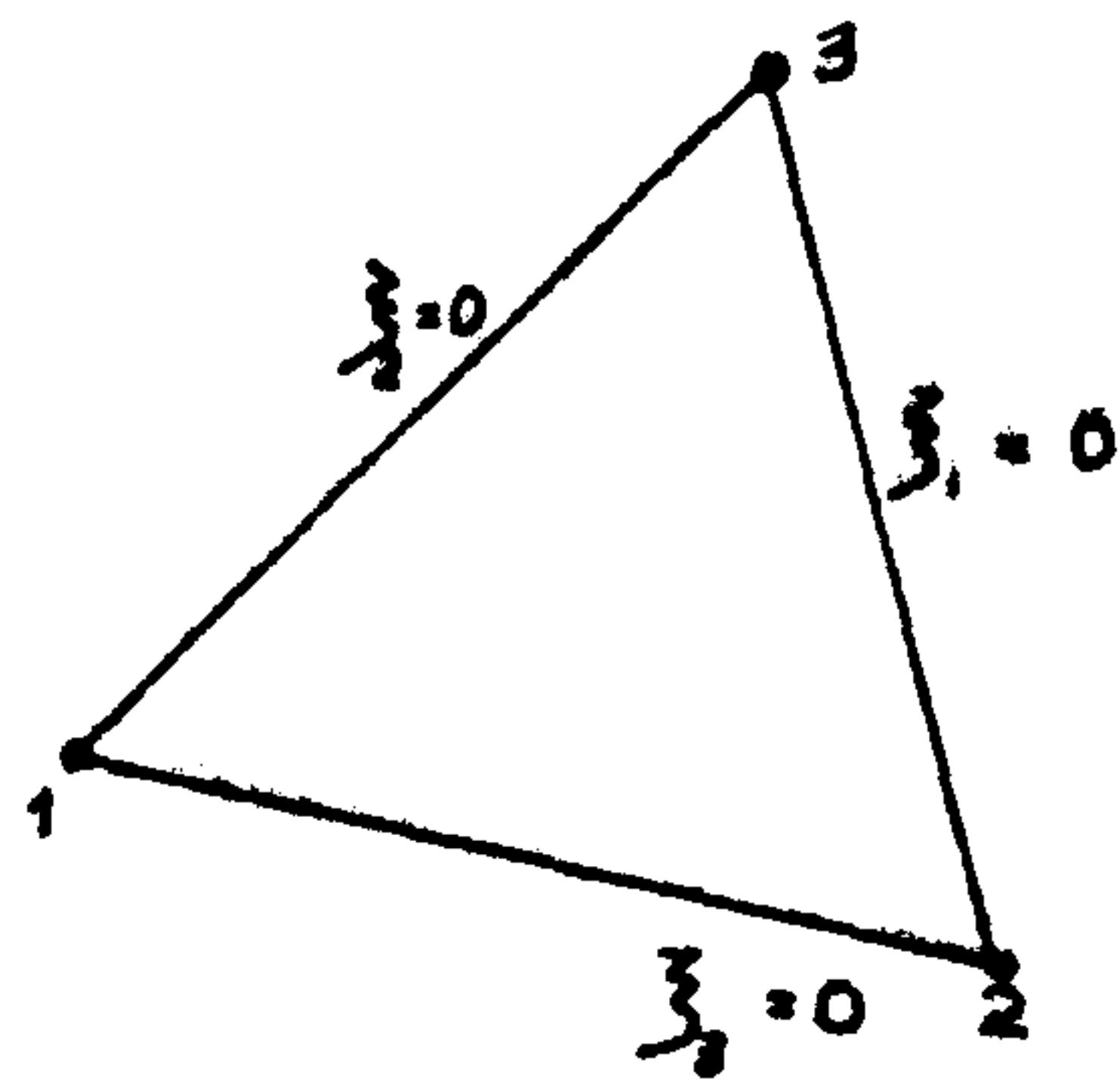
... (3.20)

$$\xi_i = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i) \quad i=1,2,\dots,8$$

4.3. Familias C^0 bidimensionales.

La generación de funciones de interpolación en triángulos puede conseguirse mediante el esquema utilizado en el apartado 4.1.1. para elementos monodimensionales.

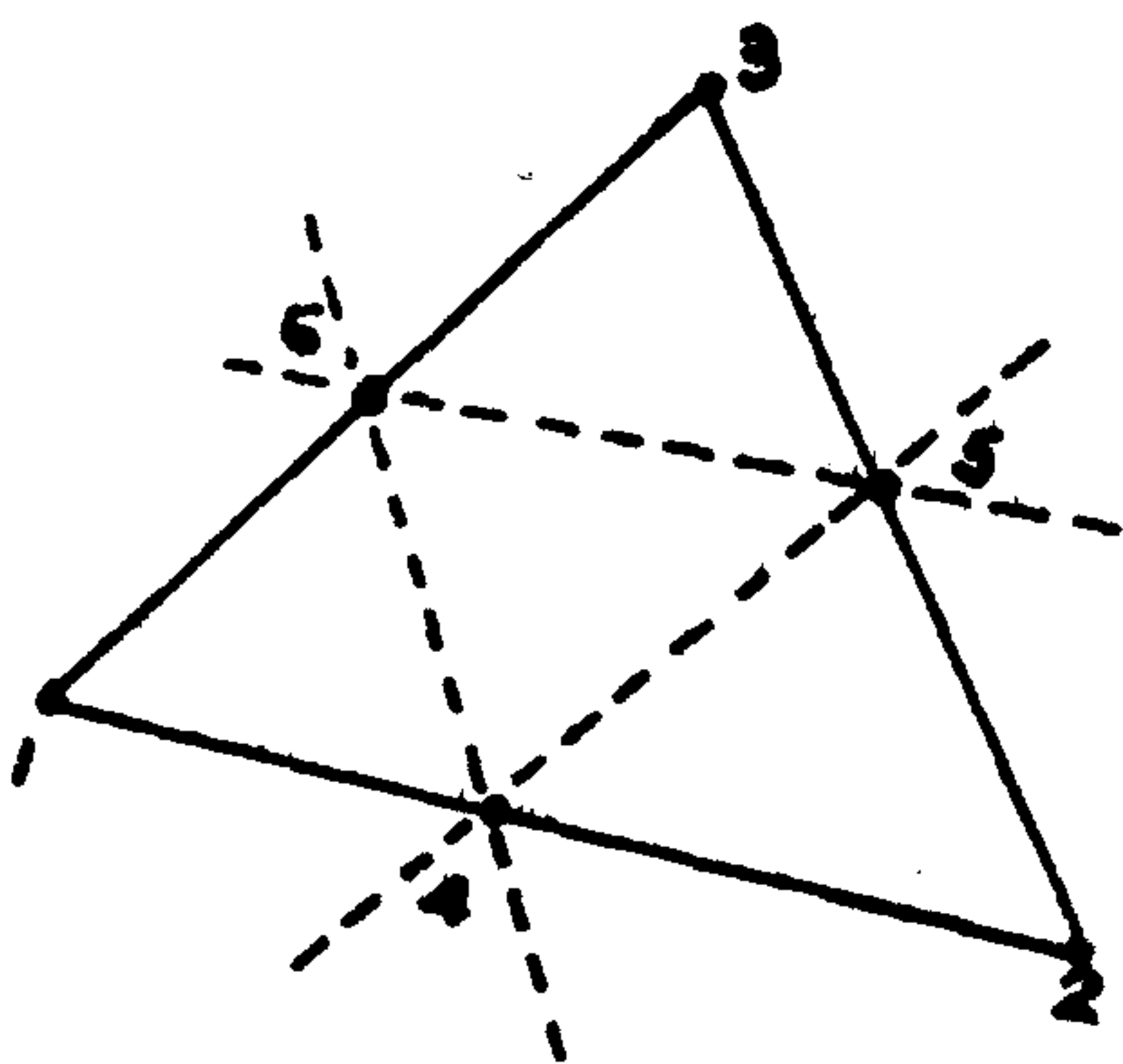
Por definición las coordenadas naturales son las funciones de interpolación en el caso de variación lineal de la variable de campo. Por ello el caso más simple es el CST (Constant Strain Triangle) donde



$$\underline{u} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \underline{\delta}^e$$

$$N_1 = \xi_1 \quad N_2 = \xi_2 \quad N_3 = \xi_3$$

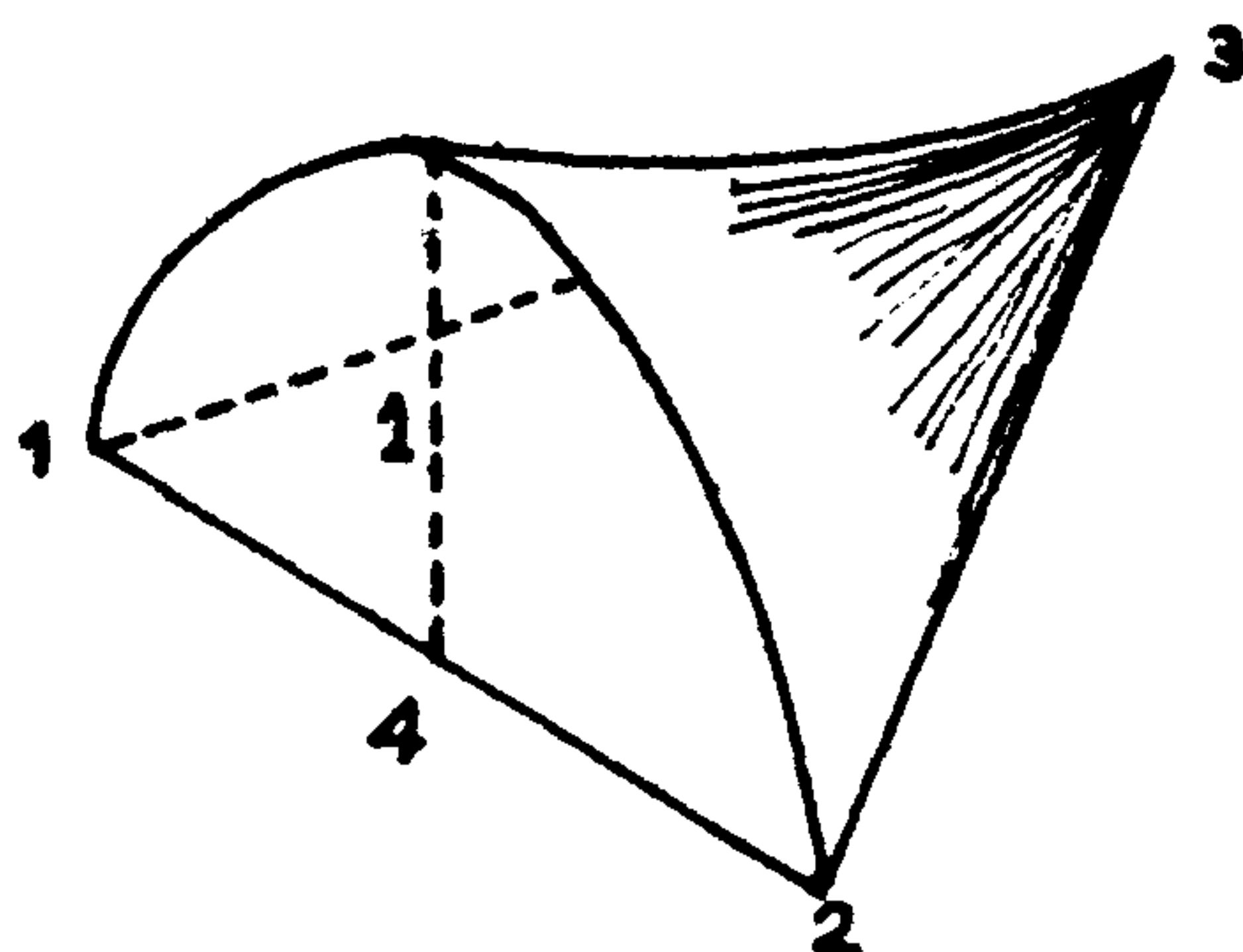
$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\delta}^e = (u_1 v_1 \quad u_2 v_2 \quad u_3 v_3)^T$$



El caso LST (Linear Strain Triangle) exige 6 funciones de forma.

Para generar la correspondiente al nudo 4 usaremos la expresión ya conocida

$$N_4 = 4 \xi_1 \xi_2$$



que representa una parábola sobre el lado $\xi_3 = 0$

Sobre los lados $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 0$ es evidente -- que $N_4 = 0$ y por ello dicha función satisface todos los requisitos como función de forma.

Para ver su forma podemos escoger la línea 3.4

$$N_1 = \xi_1 (2 \xi_1 - 1)$$

Así pues el triángulo LST está provocado por las funciones de forma

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi_1 (2 \xi_1 - 1) & N_4 &= 4 \xi_1 \xi_2 \\ N_2 &= \xi_2 (2 \xi_2 - 1) & N_5 &= 4 \xi_2 \xi_3 \\ N_3 &= \xi_3 (2 \xi_3 - 1) & N_6 &= 4 \xi_3 \xi_1 \end{aligned}$$

y el movimiento se interpola mediante

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} N_1 \underline{1} & N_2 \underline{1} & N_3 \underline{1} & N_4 \underline{1} & N_5 \underline{1} & N_6 \underline{1} \end{pmatrix} \underline{\delta}^e$$

$\begin{matrix} 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times 2 \end{matrix}$

$\begin{matrix} (2 \times 1) & & (2 \times 12) & & & (12 \times 1) \end{matrix}$

Obsérvese

- 1º) Que los grados de libertad $2 \times 6 = 12$ coinciden con las constantes necesarias para un polinomio completo de segundo grado (6 x movim.)

$$u = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 x y + c_6 y^2$$

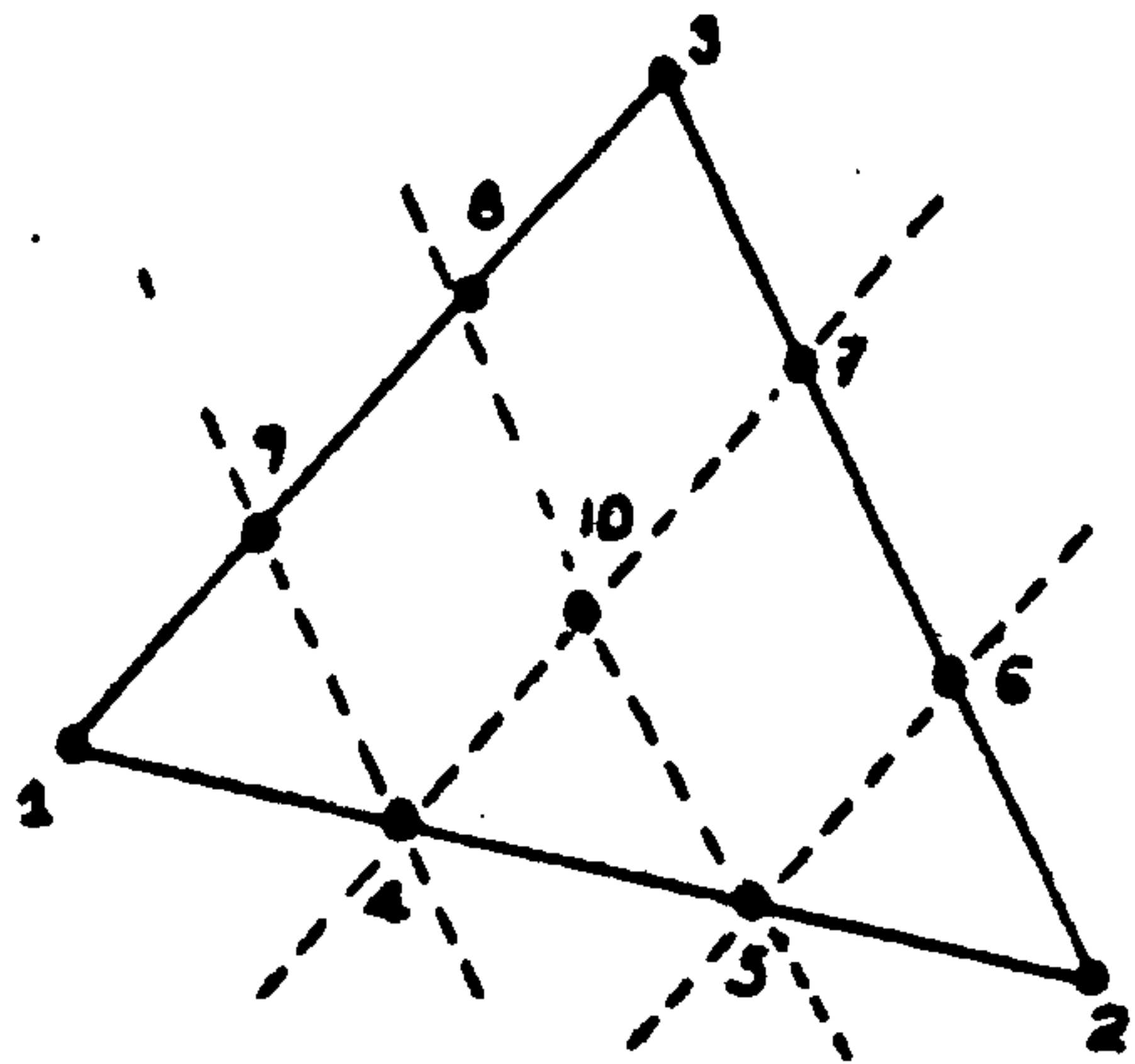
$$v = c_7 + c_8 x + c_9 y + c_{10} x^2 + c_{11} x y + c_{12} y^2$$

- 2º) Que la expresión en coordenadas naturales ha permitido utilizar unas expresiones muy sencillas para N_i .

El siguiente elemento de la familia, el QST (quadratic strain triangle) merece algún comentario.

Un polinomio cubico tiene 10 terminos, de modo que, como manejamos dos valores de la variable de campo (u,v) habría 20 constantes a determinar a partir de las variables nodales. Si éstas son movimientos (familia C^0) necesitaríamos 10 nodos.

Ahora bien una variación cúbica en el contorno se consigue con 4 nodos por lado lo que implica la aparición de un nodo interior.



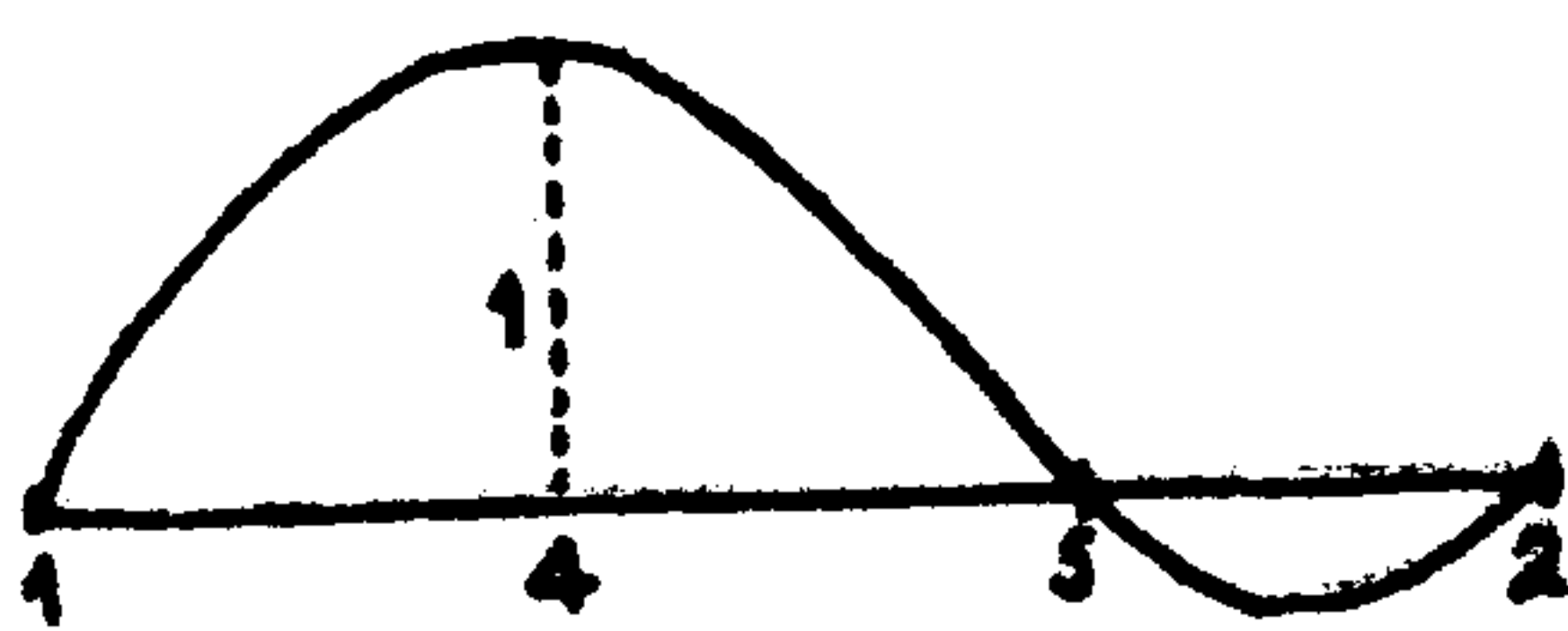
Es decir pondríamos

$$\underline{u} = \sum_1^9 \underline{N}_i \underline{u}_i + N_{10} \underline{u}_{10}$$

Según hemos visto el procedimiento comienza con la generación de la solución interior monodimensional.

En el caso de polinomio cúbico

$$N_4 = A(x/L) + B(x/L)^2 + C(x/L)^3$$



$$\begin{cases} 1 = A \frac{1}{3} + B \frac{1}{9} + C \frac{1}{27} \\ 0 = A \frac{2}{3} + B \frac{4}{9} + C \frac{8}{27} \\ 0 = A + B + C \end{cases}$$

$$\begin{array}{l|l|l} 0 = B(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}) + C(\frac{8}{27} - \frac{2}{3}) & 0 = +\frac{2}{9}B + \frac{10}{27}C & B + \frac{5}{3}C = 0 \\ 1 = B(\frac{1}{9} - \frac{1}{3}) + C(\frac{1}{27} - \frac{1}{3}) & 1 = -\frac{2}{9}B - \frac{8}{27}C & B + \frac{4}{3}C = -\frac{9}{2} \end{array}$$

$$\frac{1}{3}C = +\frac{9}{2} ; \quad \boxed{C = +\frac{27}{2} ; \quad B = -\frac{45}{2} \quad A = \frac{45-27}{2} = 9}$$

$$N_4 = \frac{9 \cdot 2}{2} \left(\frac{x}{L}\right) - \frac{5 \cdot 9}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{3 \cdot 9}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^3 = \frac{9}{2} \xi_2 [2 - \xi_2(5 - 3\xi_2)]$$

$$N_4 = \frac{9}{2} \xi_2 \left\{ 2 - \xi_2 [3(1 - \xi_2) + 2] \right\} = \frac{9}{2} \xi_2 [2 - \xi_2(3\xi_1 + 2)] =$$

$$= \frac{9}{2} \xi_2 [2(1 - \xi_2) - 3\xi_1 \xi_2] = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (2 - 3\xi_2) =$$

$$= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 [2 - 3(1 - \xi_1)] = \boxed{\frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1)}$$

Así pues

$$\begin{aligned} N_4 &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3 \xi_1 - 1) \\ N_5 &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3 \xi_2 - 1) \end{aligned}$$

Siguiendo los pasos del caso anterior, las mismas funciones sirven para el triangulo con lo que

$$\begin{aligned} N_6 &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3 \xi_2 - 1) \\ N_7 &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3 \xi_3 - 1) \\ N_8 &= \frac{9}{2} \xi_3 \xi_1 (3 \xi_3 - 1) \\ N_9 &= \frac{9}{2} \xi_3 \xi_1 (3 \xi_1 - 1) \end{aligned}$$

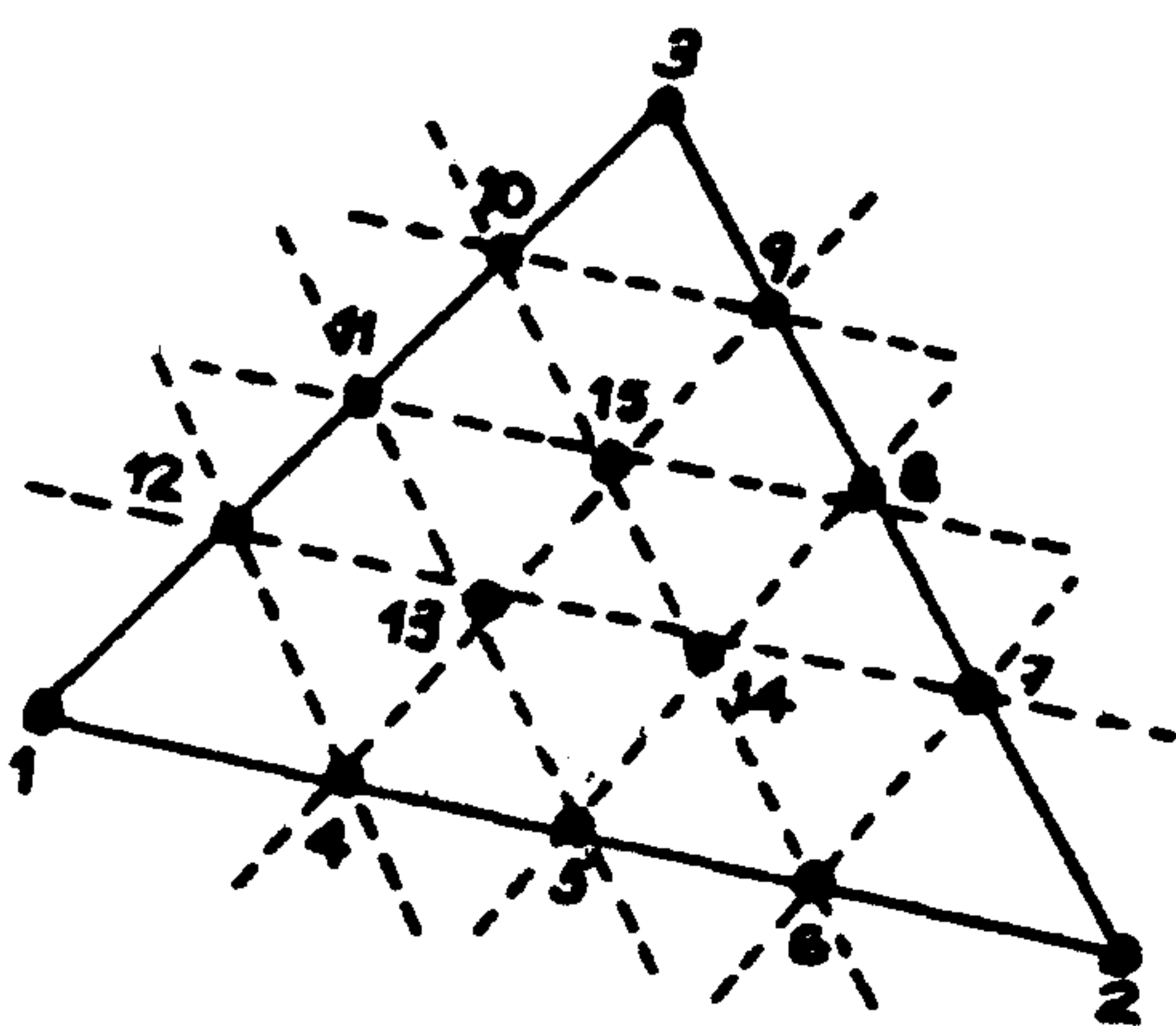
Finalmente el nodo interno corresponde a una función que se anula en los lados por lo que

$$N_{10} = \lambda \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

Como debe ser unidad para $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 =$
 $= 1/3 \Rightarrow \lambda = 27$

$$N_{10} = 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3$$

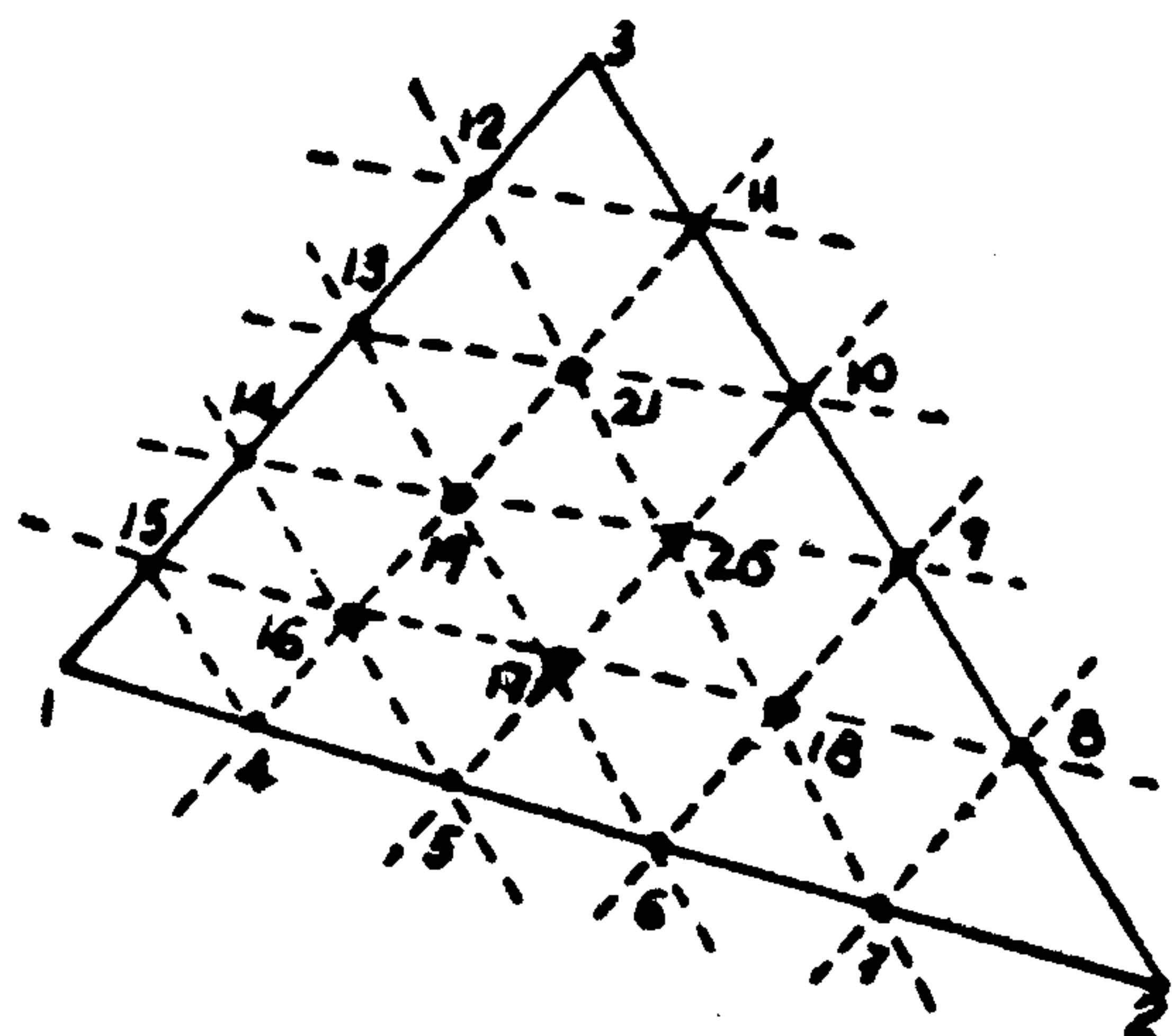
La expresión de las funciones correspondientes a los vértices se obtiene, igual que antes, combinando con valores adecuados.



Posterioros elementos de la familia serian un desarrollo de 4º grado con $15 \times 2 = 30$ términos y 15 nodos de los cuales tres serian interiores o bien otro de 5º grado con

$$P_5 = \frac{(5+1)(5+2)}{2} = 21 \text{ nodos}$$

de los cuales 6 serian interiores. Ordenes superiores serian posibles, pero en general los pro-



cesos de condensación y el incremento de ancho de banda subsiguiente a cada refinamiento van disminuyendo las ventajas, que supone el poder reducir el número de elementos. Además existe la necesidad de modelar el contorno; si éste varía en forma muy rápida el tamaño de los elementos

debe ser bastante pequeño y ello disminuye las ventajas de los elementos de orden superior a menos que se use el concepto isoparamétrico del que hablaremos más adelante.

El LST fué obtenido por Fraeijs de Venbeke en 1964 en coordenadas cartesianas, siendo Felippa (1966) quien presentó la versión en coordenadas naturales.

Otra forma de generar las funciones de interpolación es mediante una formula presentada por Argyris y sistematizado por Silvester.

Dado un nodo de coordenadas triangulares $\alpha\beta\gamma$ - la correspondiente función de interpolación es

$$N_{\alpha\beta\gamma} = N_{\alpha}(\xi_1) N_{\beta}(\xi_2) N_{\gamma}(\xi_3)$$

donde

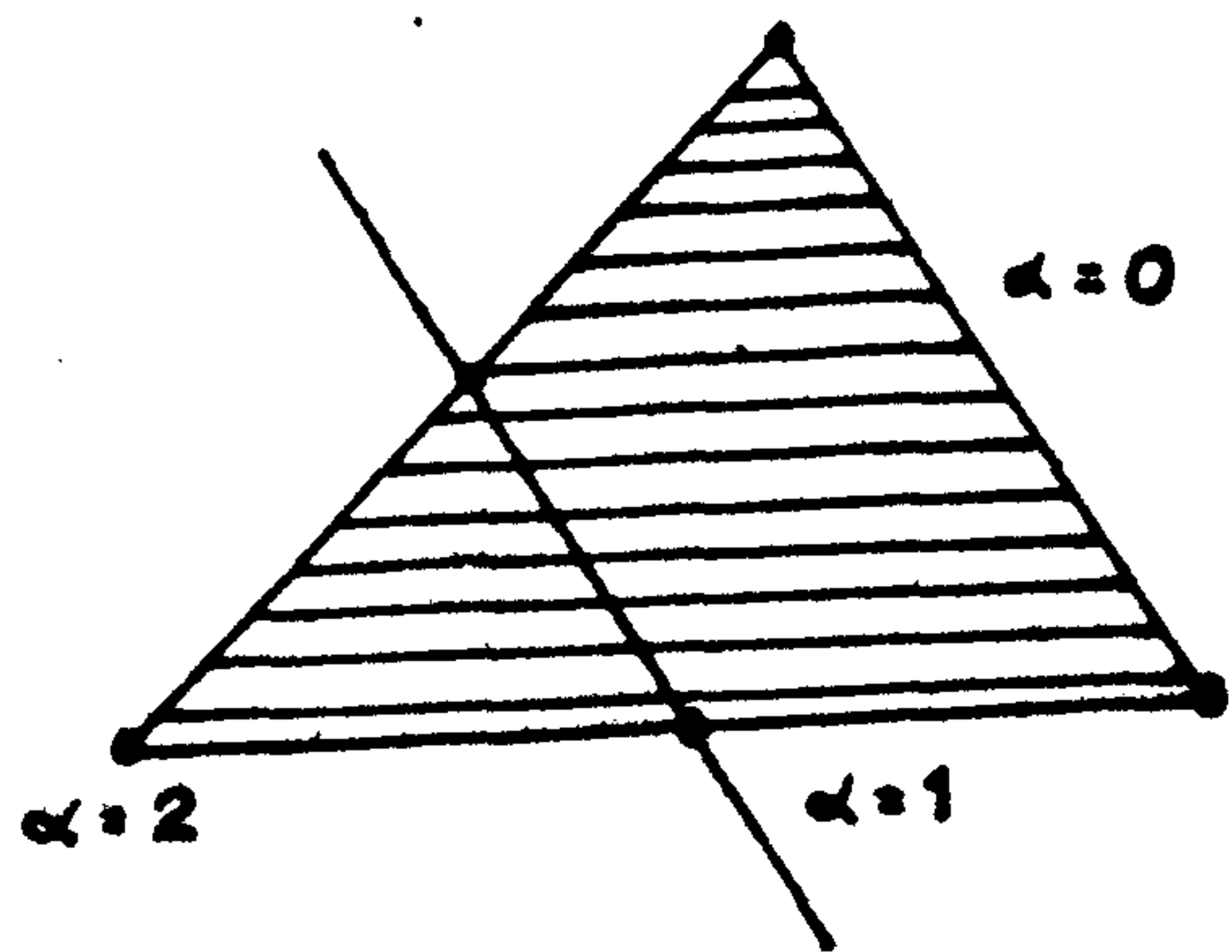
$$N_{\alpha}(\xi_1) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma} \prod_{i=1}^n \xi_1^{i-1} \quad \alpha \geq 1$$

$$= 1 \quad \alpha = 0$$

n = orden del triángulo.

y simétricas

vg.:



En el CST $n = 1$

$$\begin{cases} N_{100} = N_1(\xi_1) N_0(\xi_2) N_0(\xi_3) \\ N_1(\xi_1) = \xi_1 ; N_0(\xi_2) = N_0(\xi_3) = 1 \quad \text{etc.} \end{cases}$$

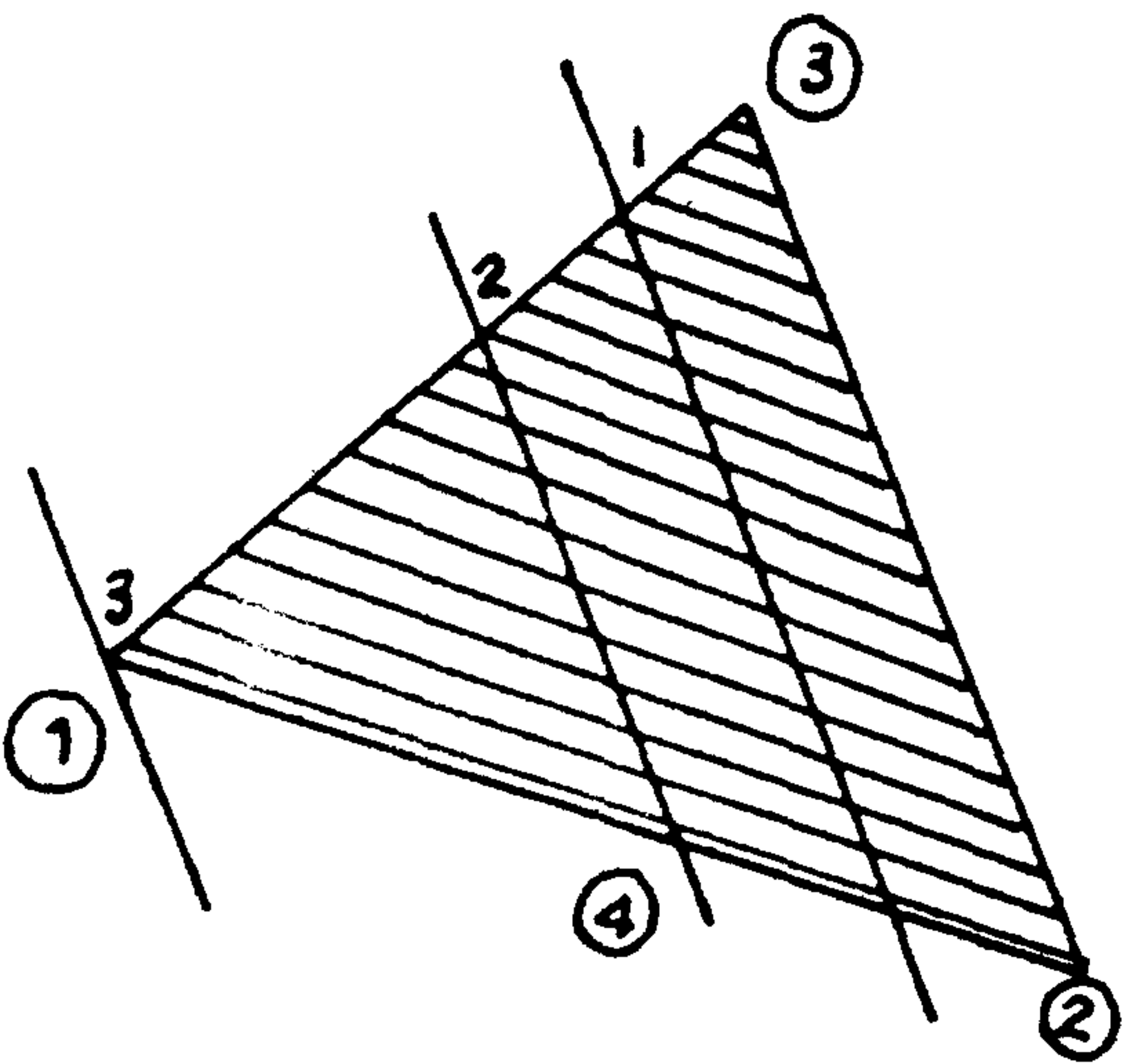
En el LST $n = 2$

$$N_1(\xi_1) = 2\xi_1 \frac{2\xi_1 - 1}{2} = \xi_1(2\xi_1 - 1)$$

En el QST $n = 3$

En el nodo 1

$$N_4(\xi_1) = \frac{3\xi_1 - 2}{3} \cdot \frac{3\xi_1 - 1}{2} \cdot 3\xi_1 = \frac{\xi_1}{2} (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2)$$



En el nodo 4

$$N_{210} = N_2(\xi_1) N_1(\xi_2) N_0(\xi_3)$$

$$N_2(\xi_1) = 3\xi_1 \cdot \frac{3\xi_1 - 1}{2}$$

$$N_1(\xi_2) = 3\xi_2$$

etc.

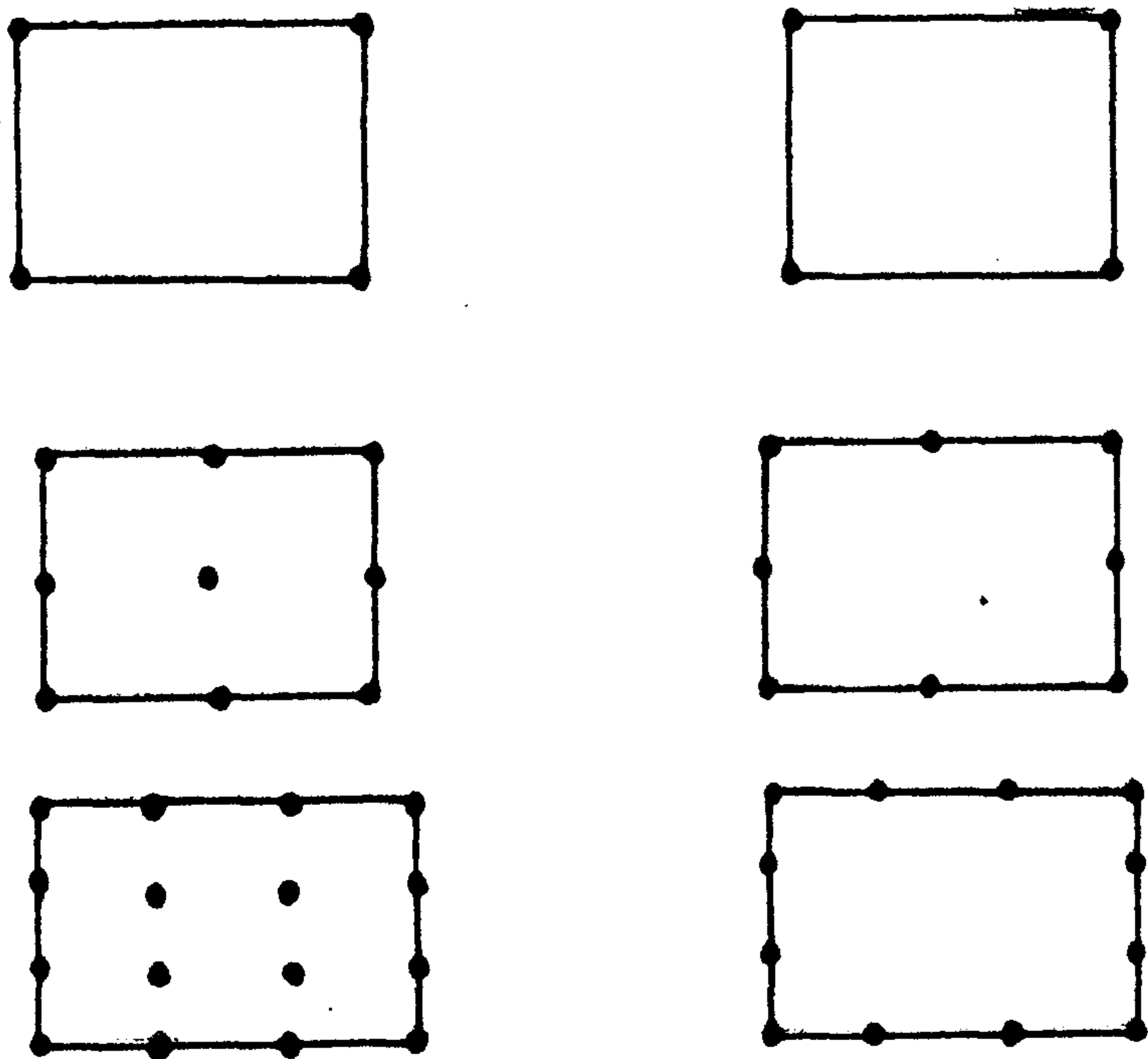
$$N_{220} = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1)$$

En los elementos rectangulares caben dos enfoques

la familia de Lagrange y la familia de Serendip.

La primera corresponde al concepto monodimensional que hemos visto en el apartado anterior, mientras que la segunda

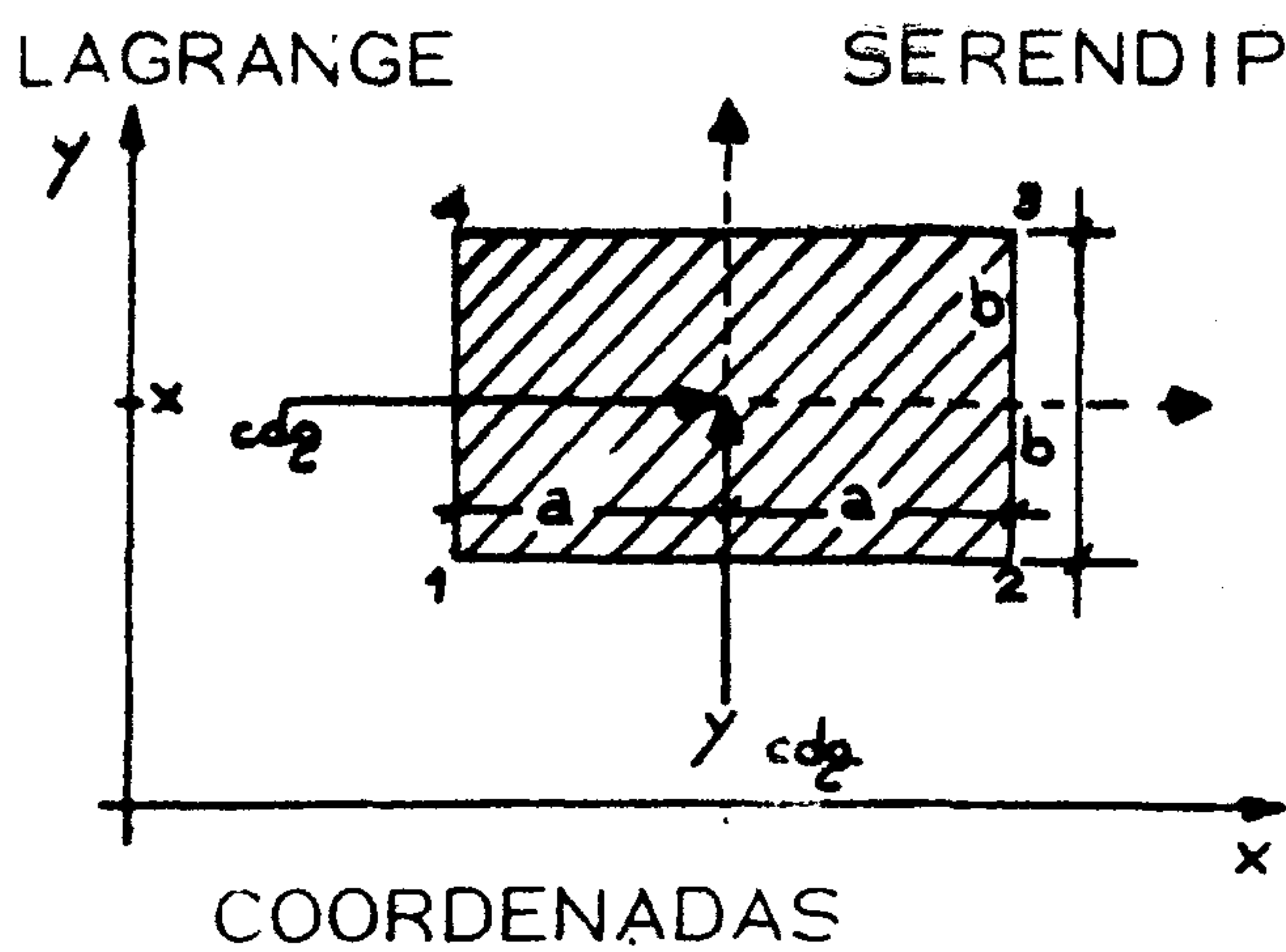
procede por inducción.



Recordemos que un polinomio de Lagrange de grado n y valor unidad en $x = x_k$ se obtiene mediante

$$L_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$$

Para derivar la familia lagrangiana tomamos el sistema de coordenadas naturales



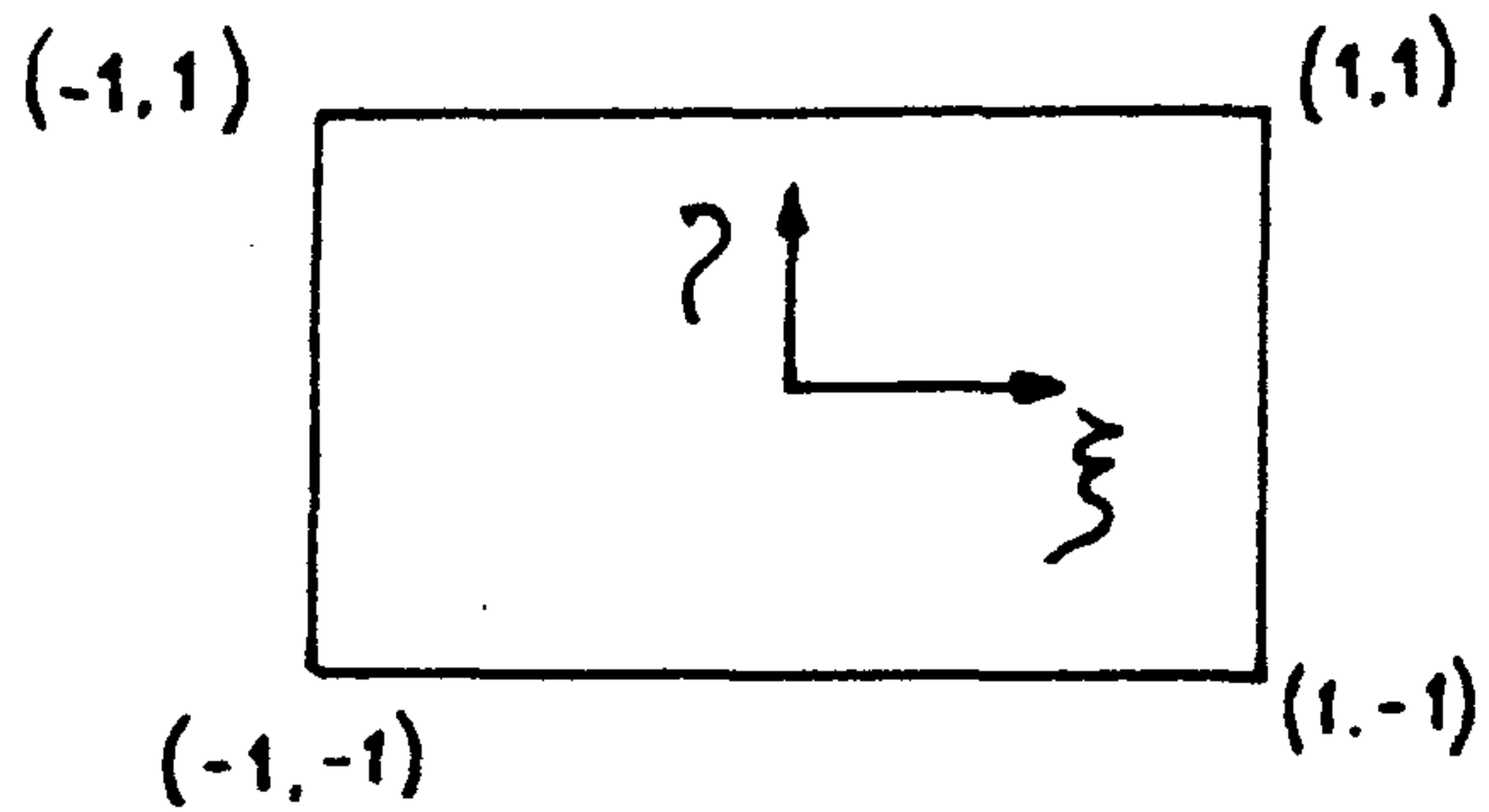
$$\begin{cases} \xi = \frac{x - x_{cdg}}{a} \\ \eta = \frac{y - y_{cdg}}{b} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \xi \leq 1 \\ -1 &\leq \eta \leq 1 \end{aligned}$$

y escribiremos los polinomios en estos ejes.

Las funciones de forma se obtendran simplemente como producto de los polinomios de Lagrange.

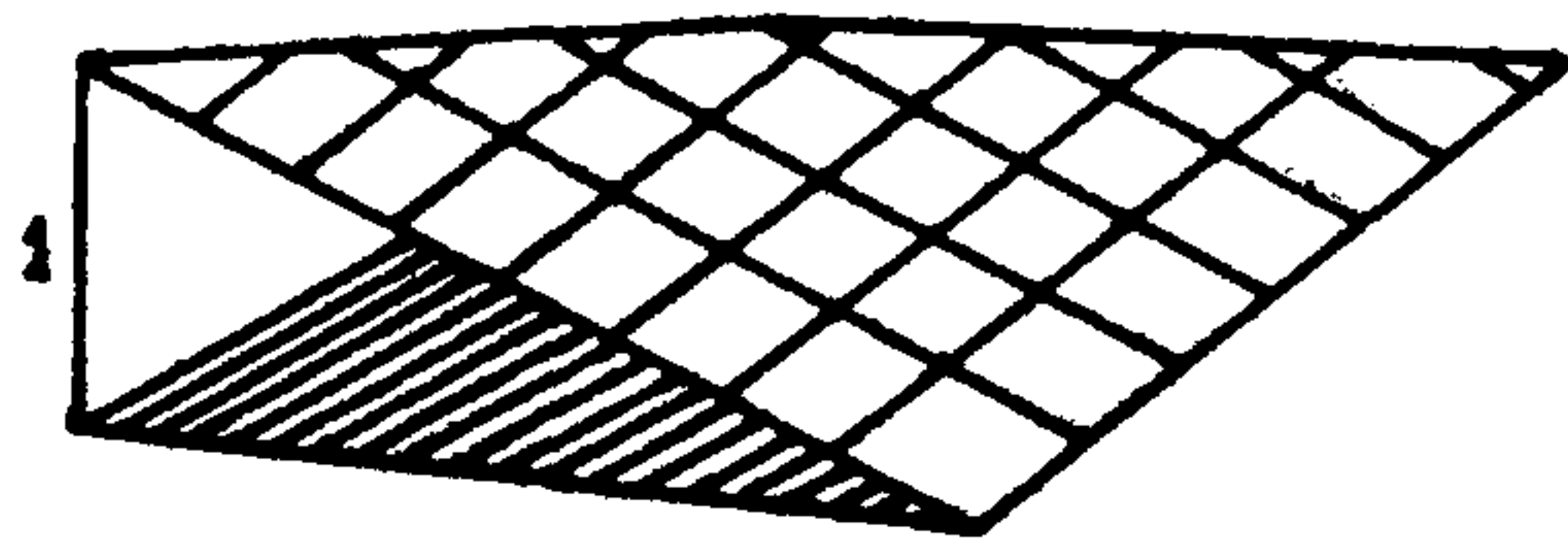
Por ejemplo, si se supone una variación lineal tendríamos



$$\begin{aligned} N_1 &= L_1(\xi) L_1(\eta) = \\ &= \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \frac{\eta - \eta_4}{\eta_1 - \eta_4} \end{aligned}$$

y en virtud de la normalización a que hemos sometido las coordenadas

$$N_1 = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} \frac{\eta - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta)$$



La forma es un paraboloide hiperbólico y la función se llama bilineal.

Analogamente

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)$$

Antes de seguir adelante, y aunque se trate de un tema marginal conviene observar la representación que se consigue - de las deformaciones.

Para ello escribimos

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i \right)$$

Como $N_i = N_i(\xi, \eta)$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$$

Análogamente

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}$$

En nuestro caso

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} = -\frac{1}{4a} (1 - \eta) ; \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = -\frac{1}{4b} (1 - \xi)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial x} = +\frac{1}{4a} (1 - \eta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{4a} (1 + \eta)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial x} = -\frac{1}{4a} (1 + \eta)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{4a} [(1 - \eta)(u_2 - u_1) + (1 + \eta)(u_3 - u_4)]$$

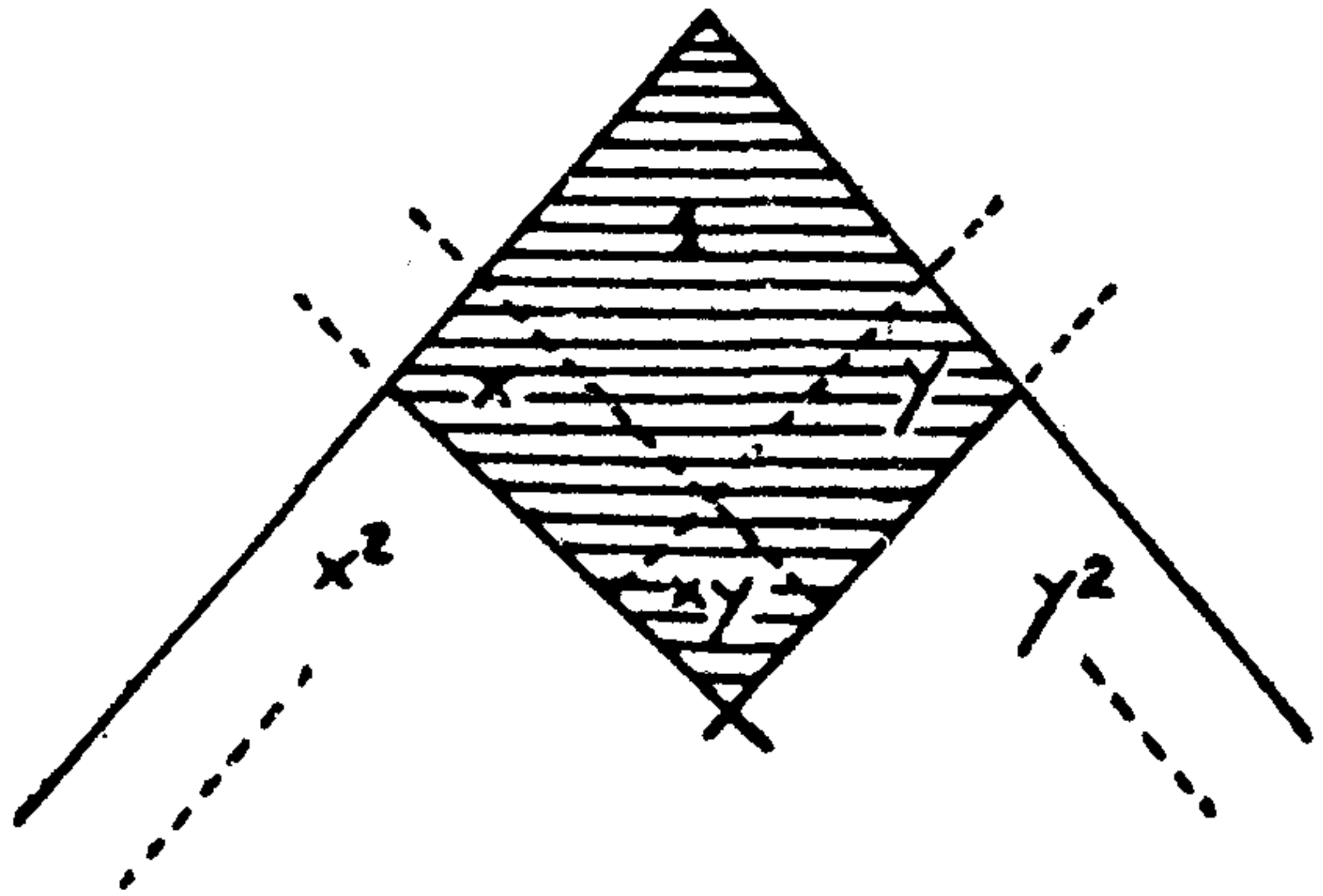
Análogamente

$$\varepsilon_y = \frac{1}{4a} [(1 + \xi)(v_3 - v_2) + (1 - \xi)(v_4 - v_1)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{4a} [(1 + \eta)(v_3 - v_4) + (1 - \eta)(v_2 - v_1)] + \frac{1}{4b} [(1 + \xi)(u_3 - u_2) + (1 - \xi)(u_4 - u_1)]$$

De las expresiones anteriores obtenemos la conclusión de que las deformaciones no son constantes, como sucedía en

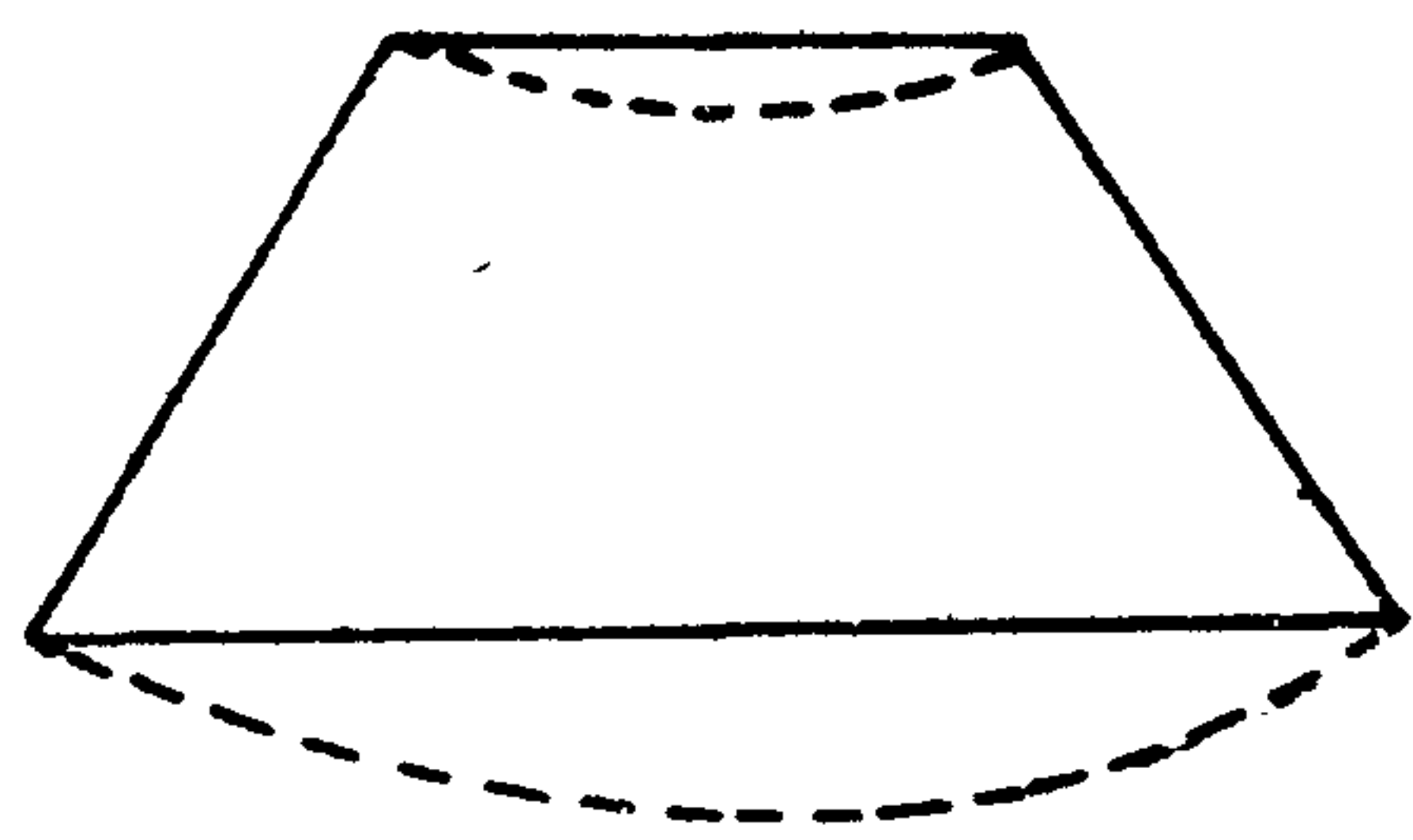
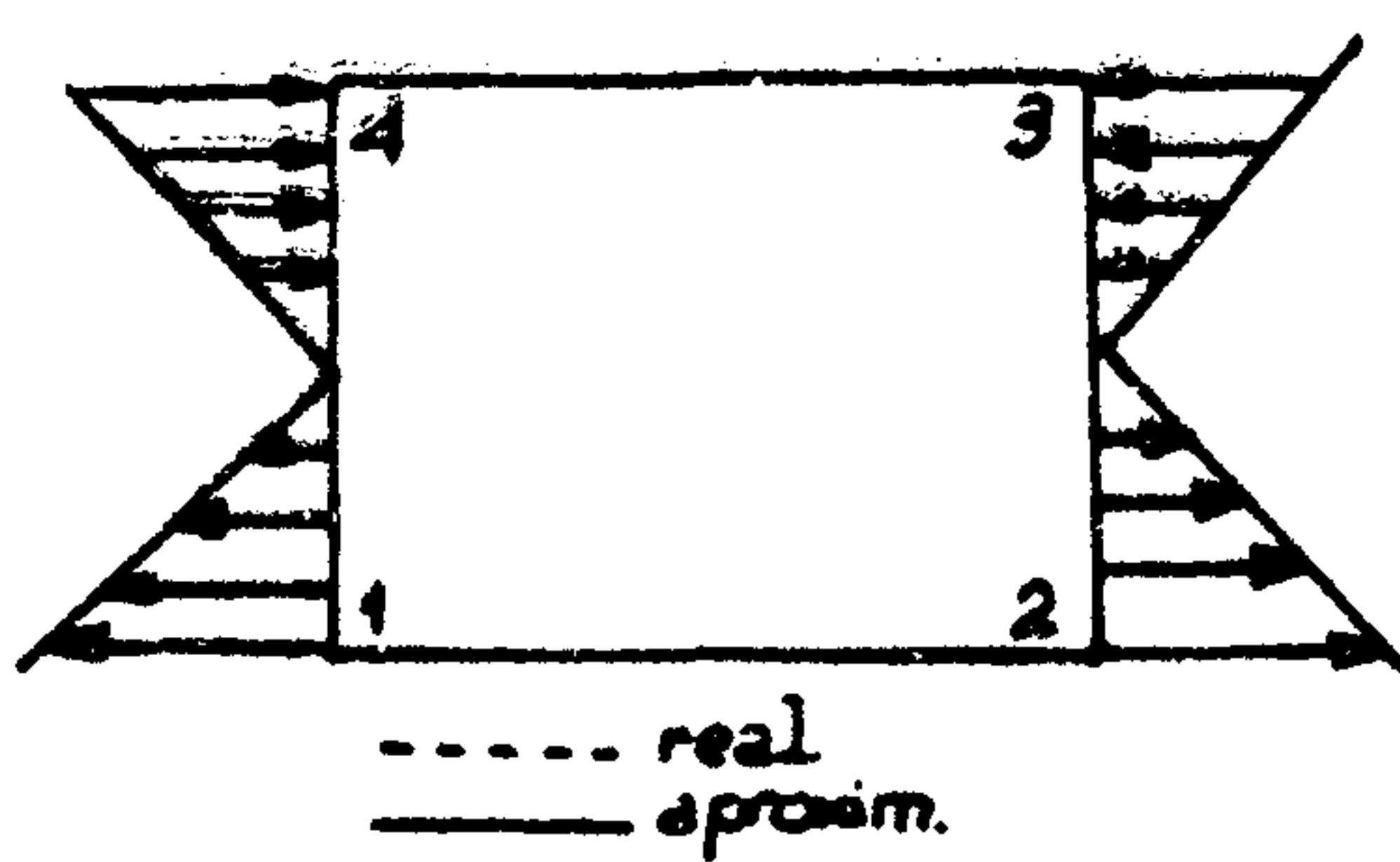
el primer miembro de la familia de triángulos (el CST) pero tampoco son lineales pues, por ejemplo, el término en η falta en ε_x .



Lo que ha sucedido se comprende si miramos al triángulo de Pascal.

El hecho de formar productos de funciones lineales en los lados implica la incorporación del término de orden superior central, que es el responsable de la bilinealidad y la anisotropía lineal de las deformaciones.

El rectángulo es por lo tanto un elemento superior al triángulo CST pero tiene también sus problemas.



Si, por ejemplo, se estudia un elemento sometido a flexión, los puntos (1,4) y (2,3) tienen movimientos horizontales y de sentidos contrarios, de modo que la aproximación lineal recoge perfectamente la solución de Resistencia de Materiales. En los lados (3,4) (1,2) sin embargo el movimiento vertical de los extremos es el mismo, y la aproximación lineal interpreta los puntos intermedios como situados sobre una recta. En los casos de

flexión parece lógico esperar fallos de los elementos rectangulares de primer orden.

Un caso típico que se suele usar como test de la bondad de los elementos es el voladizo con carga en la punta repartida parabólicamente (CARR).

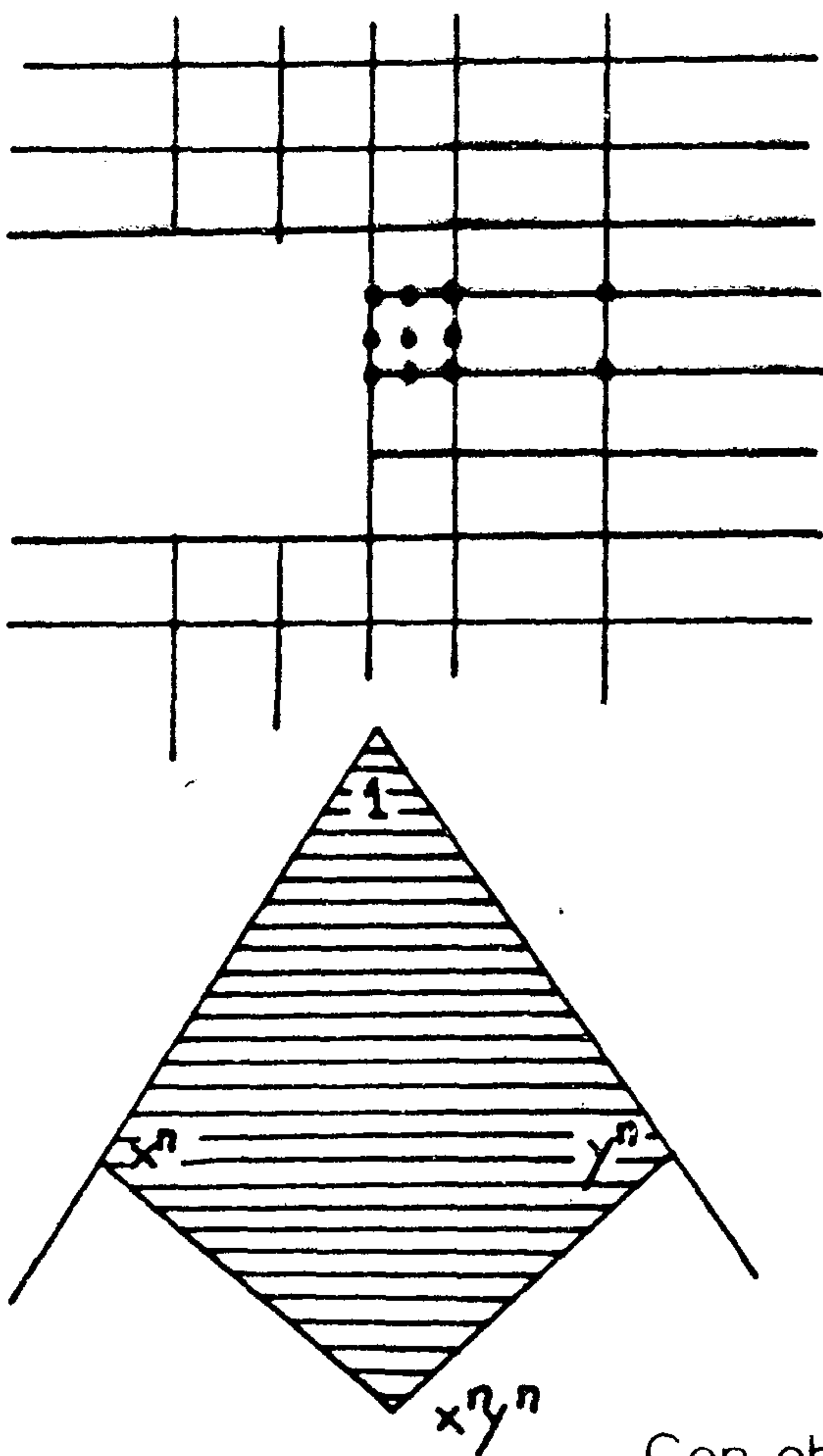
El CST produce resultados aceptables si la malla es suficientemente fina, sin embargo, el rectángulo produce resultados mejores y con menos tiempo de generación.

la función de forma correspondiente a dicho nodo es

$$N_{IJ} = \begin{matrix} n \\ I \\ I \end{matrix} \begin{matrix} m \\ J \\ J \end{matrix}$$

donde n y m son los ordenes del polinomio de Lagrange y el subíndice indica en que punto debe valer la unidad.

Con esta formula se pueden generar polinomios - de grado distinto en cada lado, lo cual puede tener interés cuando en ciertas zonas se prefiera una mayor precisión que en otras. (Se pierde la anisotropía) .



Ejercicio: desarrollar el paso 3 orden - primer orden.

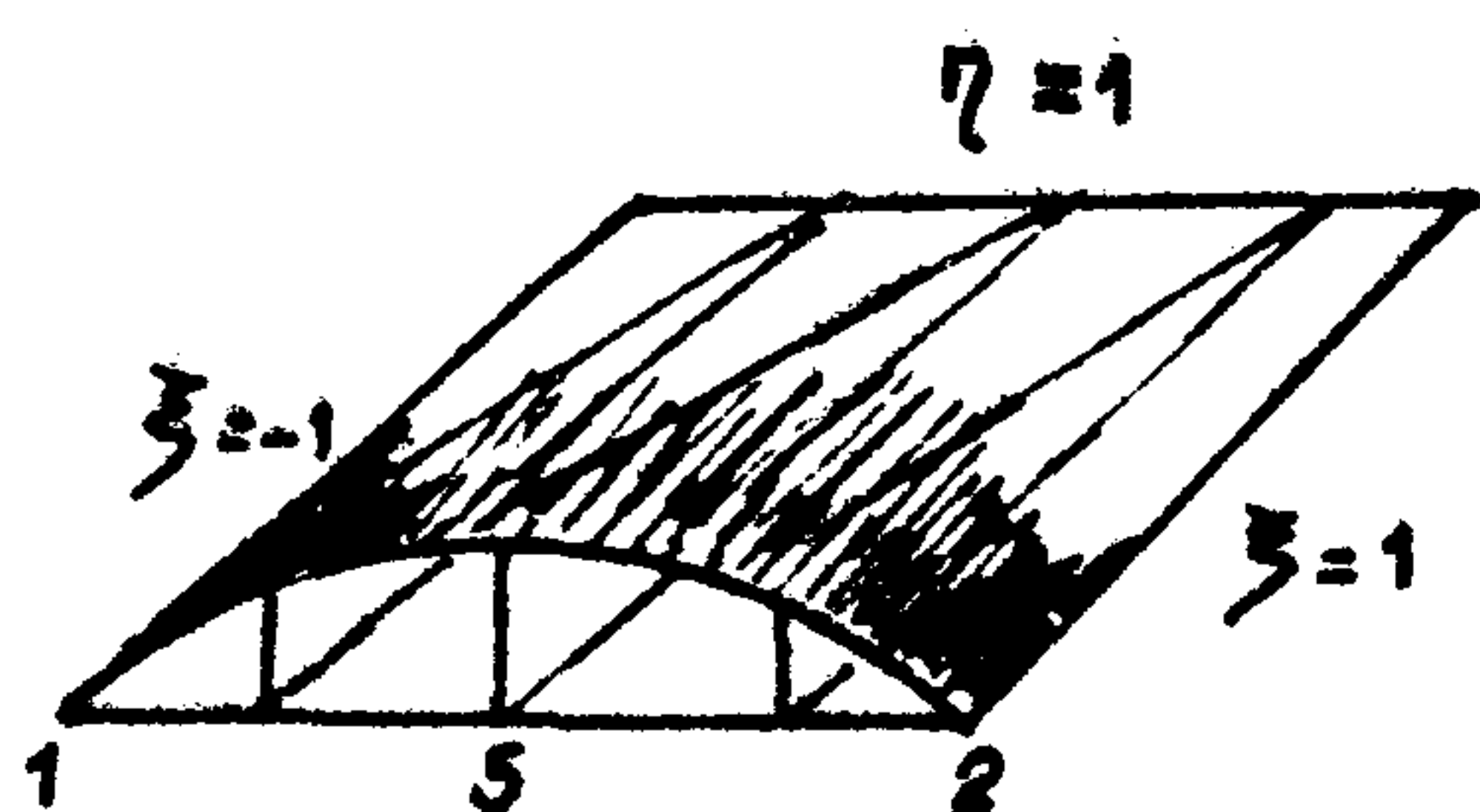
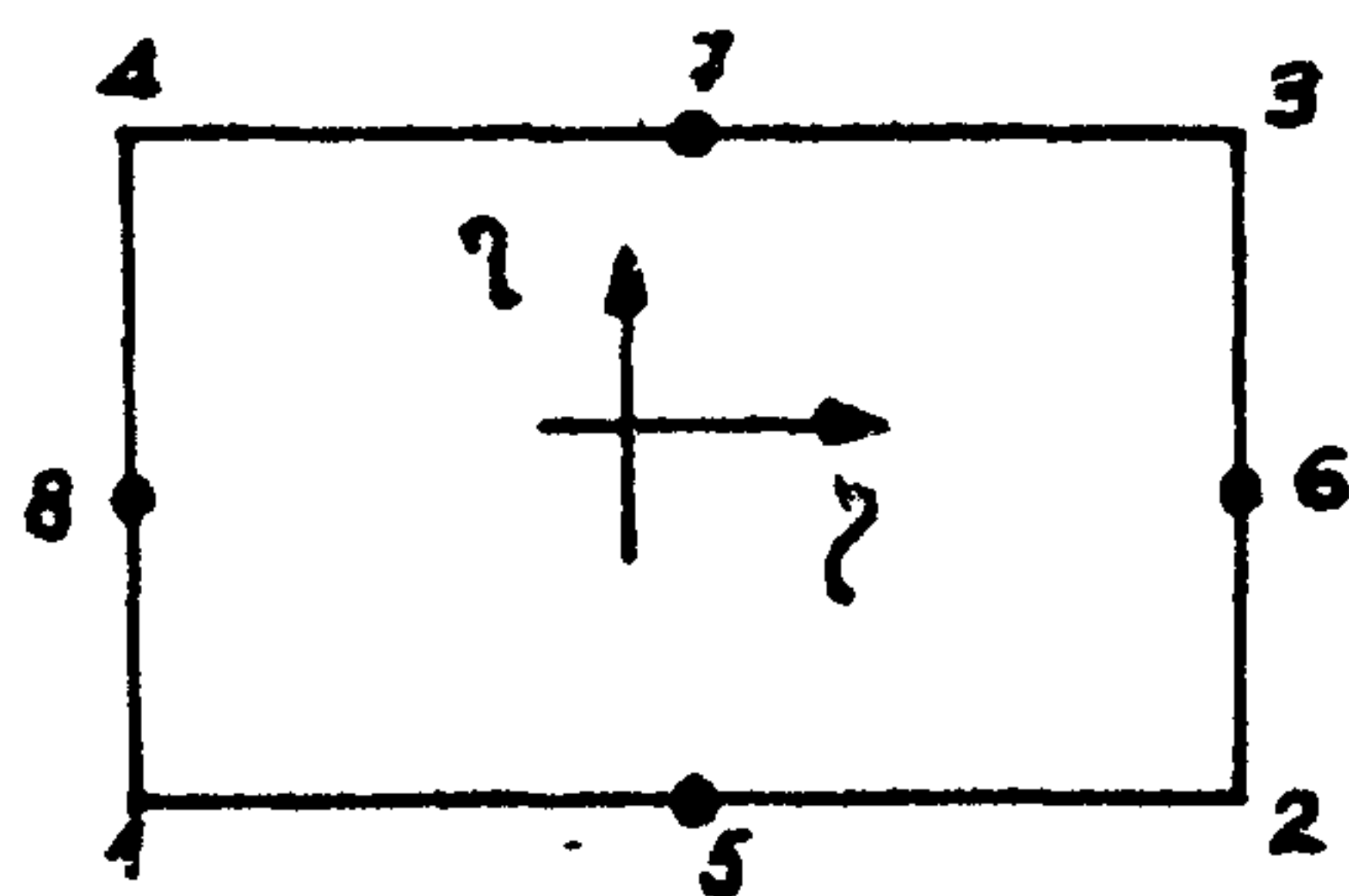
El incremento del grado de los polinomios conduce, como vemos a un importante incremento del número de no dos internos, lo que no es precisamente deseable. Si observamos el triángulo de Pascal vemos que ello es producido por el hecho de que se introducen numerosos términos "parásitos" al hacer el producto de polinomios en el contorno, lo que hace que el grado interno sea superior al del contorno.

Con objeto de eliminar este inconveniente, o por lo menos, amortiguarlo Ergatoudis, Irons y Zienckiewicz desarrollaron la familia Serendipity.

En este caso es muy útil el procedimiento que hemos mostrado anteriormente para los triángulos.

Como ejemplo desarrollaremos el caso de varia-

ción parabólica en los lados del rectángulo.



Se empieza con el nodo central, Para un sistema $(-1, 1)$ la parábola de valor unidad en 5 es

$$1 - \xi^2$$

Como N_5 debe ser nula en $\eta = 1$ podríamos multiplicar por $(1-\eta)$ con lo cual

$$N_5 = C (1-\eta)(1-\xi^2)$$

Para el punto 5 $\xi = 0$ $\eta = -1$ luego

$C = \frac{1}{2}$ es decir

$$N_5 = \frac{1}{2} (1-\eta)(1-\xi^2)$$

y análogamente

$$N_6 = \frac{1}{2} (1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2} (1+\eta)(1-\xi^2)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} (1-\xi)(1-\eta^2)$$

Las funciones en las esquinas se obtendrían mediante ajuste con el caso bilineal. Así:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta) - C_1 N_5 - C_2 N_8$$

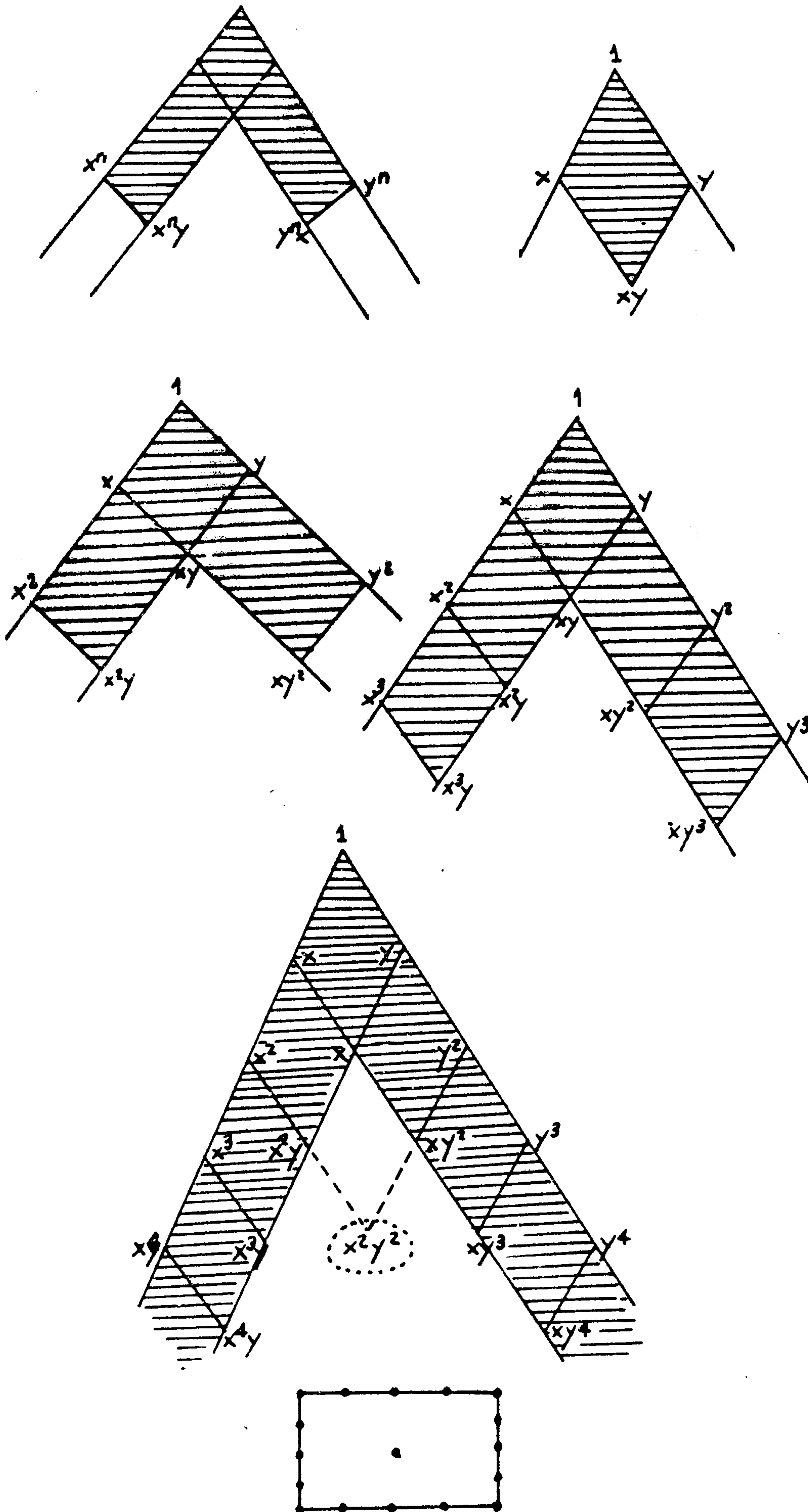
donde C_1 y C_2 valen $\frac{1}{2}$ ya que ese es el valor que aparece en el modelo bilineal. En resumen

$$N_1 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta)(-\xi + \eta - 1)$$



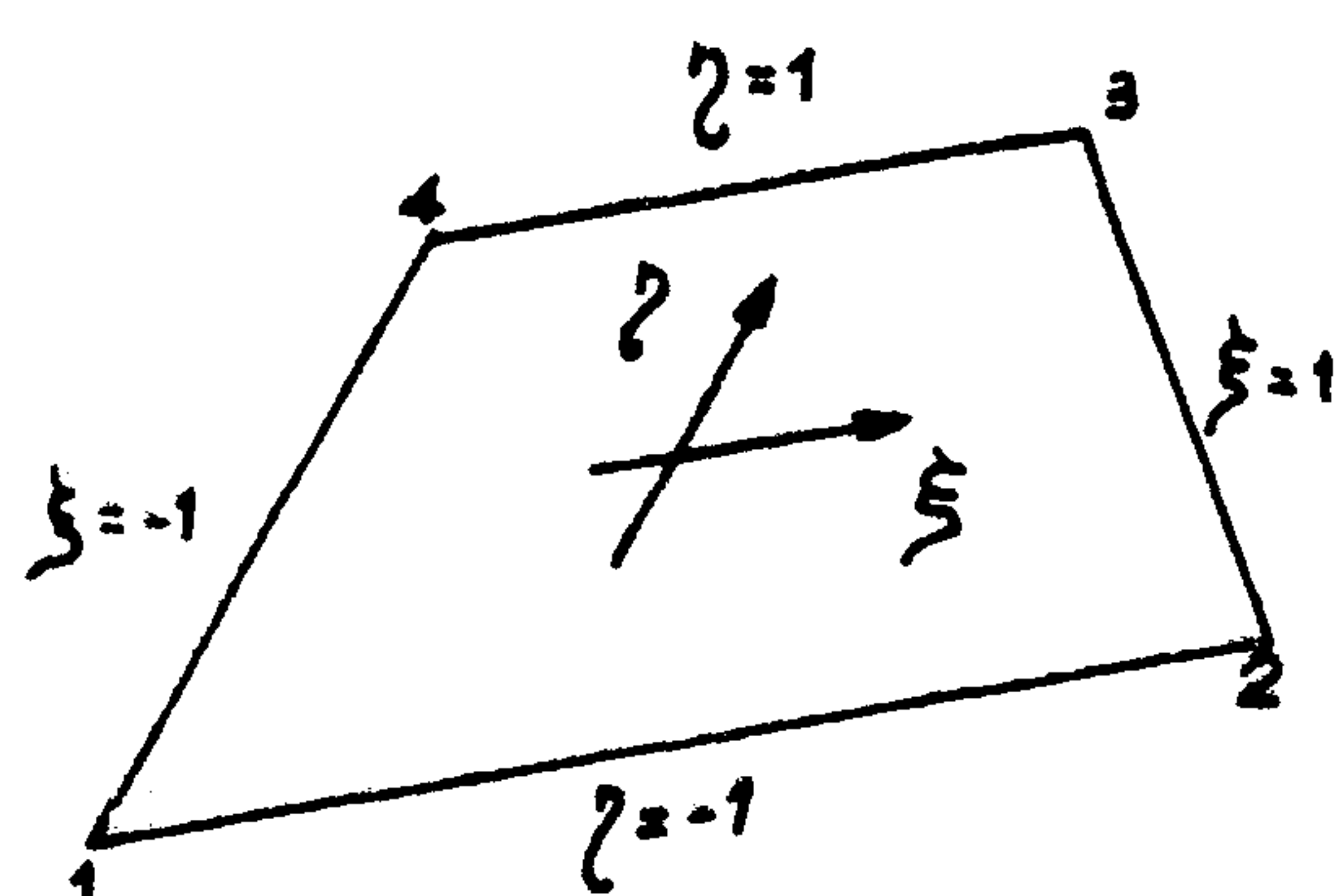
La idea es pues utilizar elementos del orden deseado - en el contorno y multiplicar los por una variación lineal en la variable. Si observamos el triángulo de Pascal lo que estamos barriendo es - las zonas que se obtienen al multiplicar por el primer orden de la variable contraria. En la figura se observa también que el mecanismo produce polinomios completos solo hasta la aproximación de tercer grado.

De allí en adelante es preciso recurrir a nodos internos o variables "sin nodo" para preservar la complitud. En el caso de la figura 16 nodos en el contorno son equiparados a los 16 términos - contenidos en el area rayada. El $x^2 y^2$ se consigue - añadiendo un nodo central.

5.- Elementos Isoparamétricos.

En el apartado 4.1.2. se estudio la forma de - establecer coordenadas naturales a partir de la funciones de forma, tomando como base la correspondiente en el caso lineal. De esta forma se pudo

escribir la ecuación 3.17



$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [N_1 \underline{1}; N_2 \underline{1}; N_3 \underline{1}; N_4 \underline{1}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

es decir

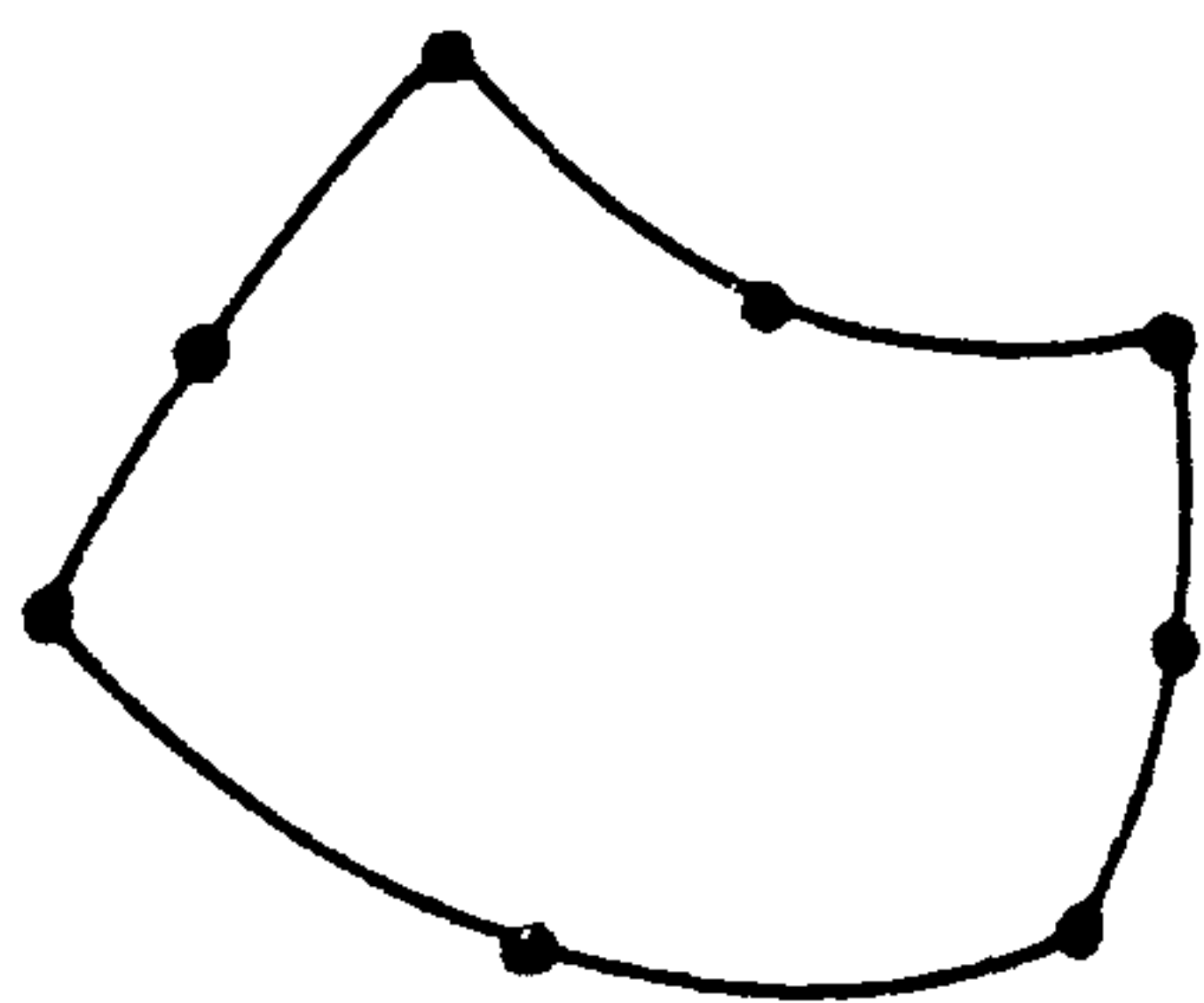
$$\underline{x} = \underline{N} \underline{x}^e$$

La estrecha semejanza con la forma de interpolan los valores de la función

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{\delta}$$

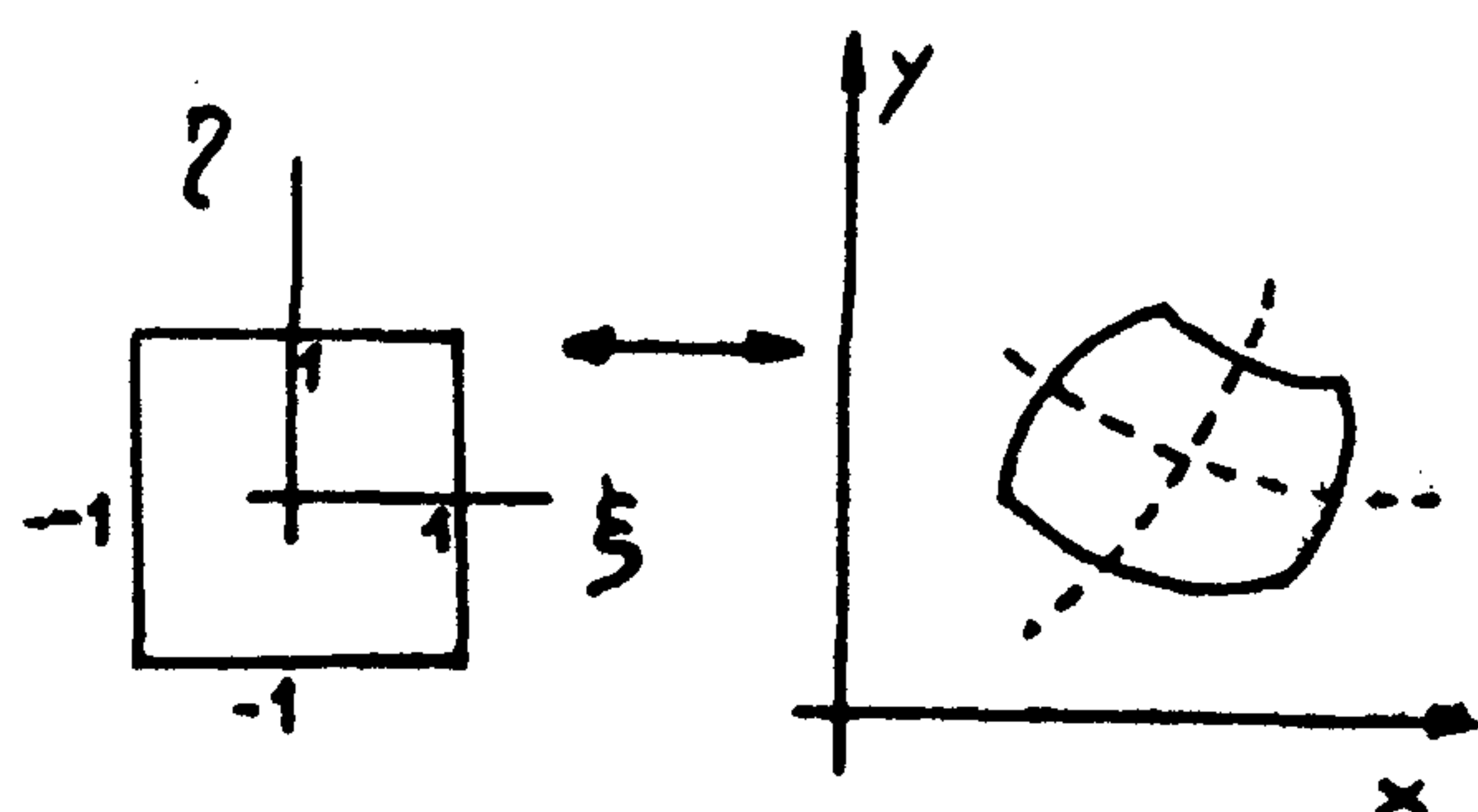
pone de manifiesto la idea de que el contorno se está interpolando entre los nodos usando las mismas funciones de la variable de campo.

La extensión inmediata es pensar que, en el caso de interpolación de orden superior tambien se podrá aproximar la geometria en la misma forma, ya que se dispone de los puntos necesarios en cada caso (3 por lado, por ejemplo, en el caso parabólico).



Puesto que se utiliza el mismo número de parámetros para definir la geometria y la variable de campo los elementos así formados se denominan isoparamétricos.

En definitiva, lo que se está haciendo es una aplicación entre los dominios elemental y global.



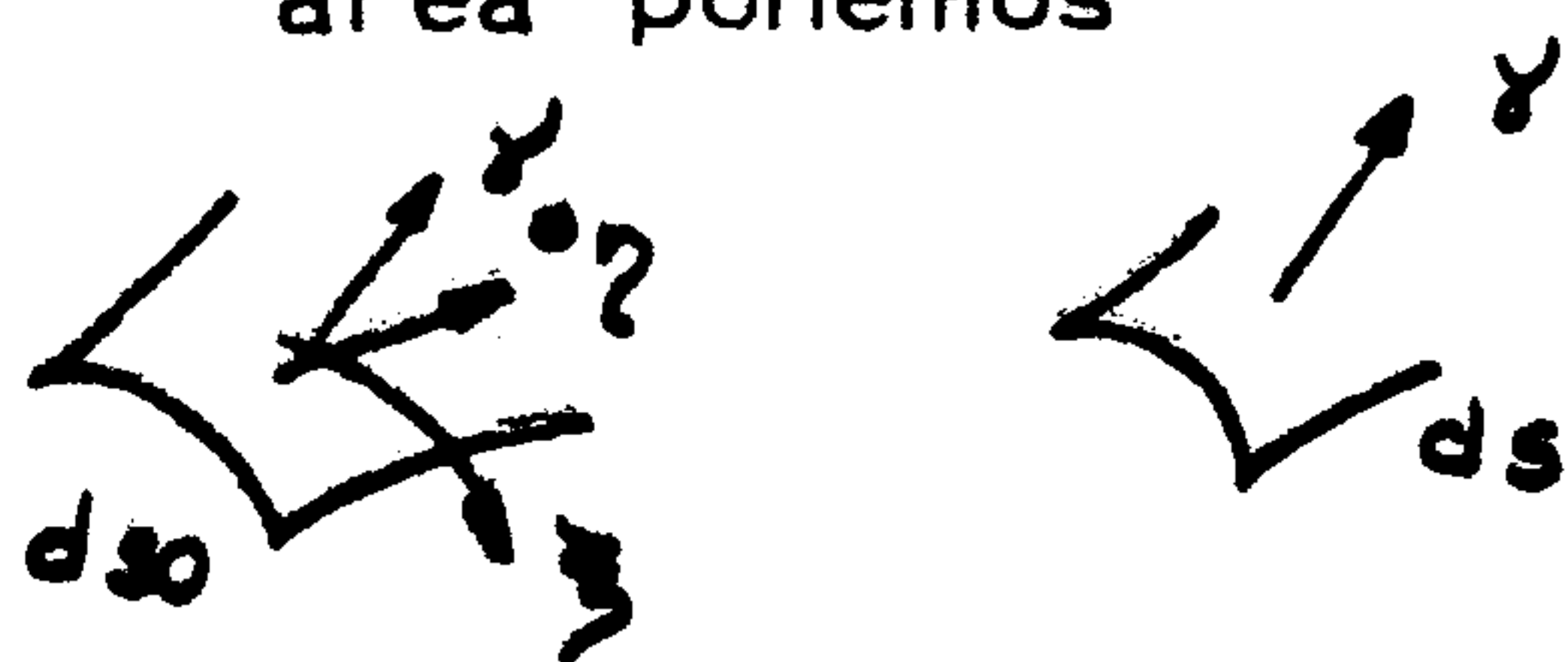
Con ello se pueden aproximar perfectamente - contornos curvilíneos y la idea de coordenadas naturales se muestra en toda su potencia y alcance.

Puesto que las operaciones se han trasladado al dominio elemental es preciso estudiar como se definirían las matrices y vectores correspondientes.

Las integrales que aparecen en su determinación son de dos tipos : de área y de volumen.

Para ver como se transforma el elemento de -

area ponemos



$$v_i ds = e_{ijk} dx_j dx_k$$

$$v_{oi} ds_o = e_{ijk} d\xi_j d\xi_k$$

$$v_{oi} ds_o = e_{ijk} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n} dx_m dx_n$$

multiplicando ambos lados por $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_e}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_e} v_{oi} ds_o &= e_{ijk} \underbrace{\frac{\partial \xi_i}{\partial x_e} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n}}_{\text{Jacobian}} dx_m dx_n \\ &= e_{emn} \left| \frac{\partial (\xi_i, \xi_j, \xi_k)}{\partial (x_e, x_m, x_n)} \right| dx_m dx_n = |J|^{-1} v_e ds \\ (v_e ds) &= |J| \frac{\partial \xi_i}{\partial x_e} (v_{oi} ds_o) \end{aligned}$$

El volumen se transforma según

$$dx dy dz = |J| d\xi d\eta d\zeta$$

En la matriz de rigidez

$$\underline{k} = \int_D \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dv$$

aparece la matriz \underline{B} que relaciona deformaciones con movimientos. En plano vg.:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} [N_1, N_2, \dots] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} =$$

$$= [\underline{B}_1, \underline{B}_2, \dots] \underline{\delta}$$

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y \\ \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}$$

Luego necesitamos expresar los valores de $\partial/\partial x \dots$

... etc.

$$\begin{cases} \partial N_i / \partial \xi = \partial N_i / \partial x \partial x / \partial \xi + \partial N_i / \partial y \partial y / \partial \xi + \partial N_i / \partial z \partial z / \partial \xi \\ \text{etc.} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}}_{\underline{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Así pues

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

El uso de la inversa de la matriz jacobiana permite poner las derivadas que aparecen en función de derivadas de las funciones de interpolación.

A su vez, como

$$x = \sum N_i x_i$$

$$y = \sum N_i y_i$$

$$z = \sum N_i z_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i ; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i ; \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i$$

etc.

y por tanto

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} 3 \times 3 & & 3 \times n & & n \times 3 \end{matrix}$

Es decir el jacobiano aparece en función de las coordenadas de los puntos y de derivadas de las funciones de forma.

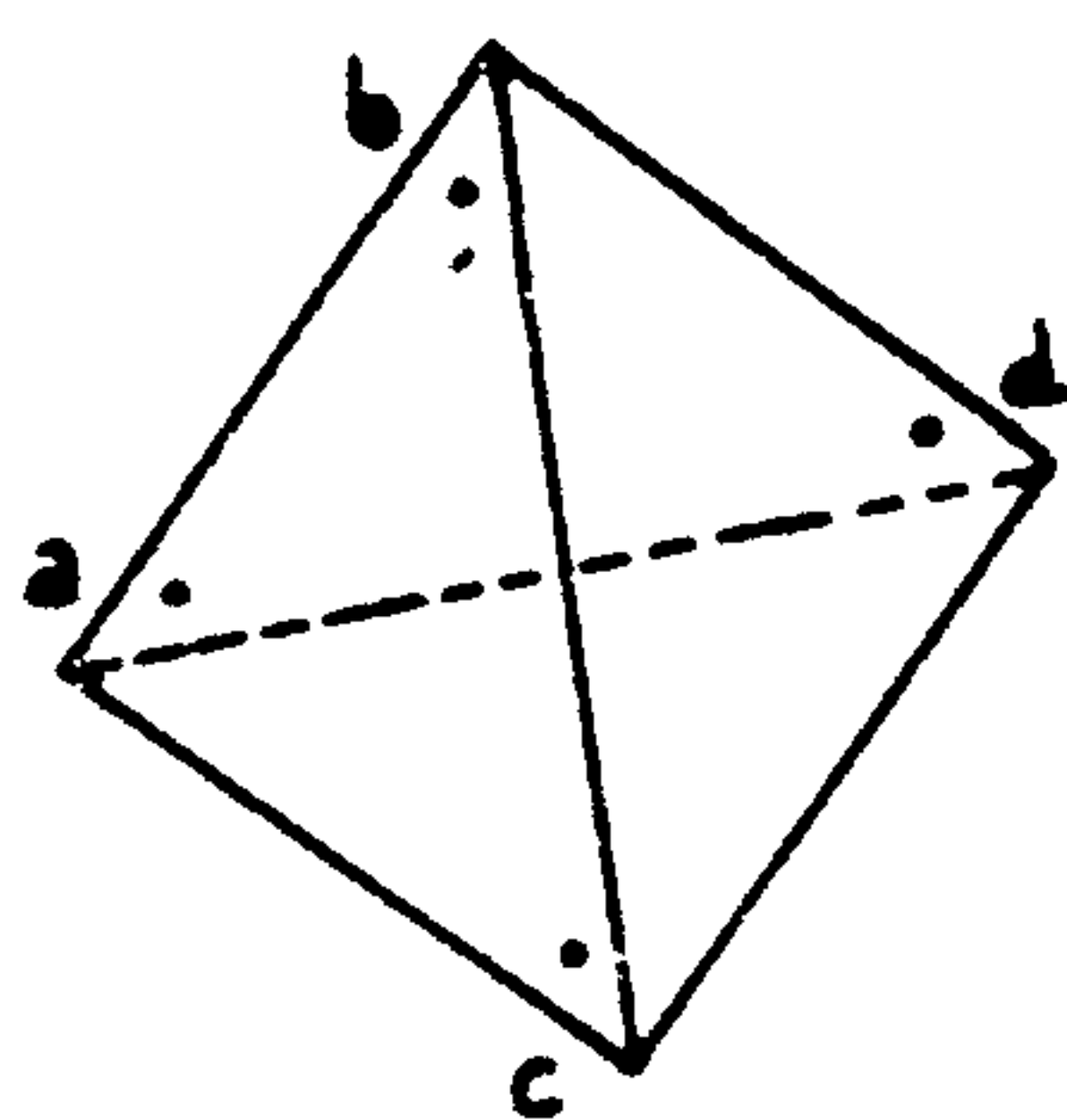
En general no es posible calcular \underline{J}^{-1} y por ello es preciso la integración numérica hasta el punto de que la existencia de los elementos isoparamétricos puede considerarse consustancial con la integración.

$$k = \int_D B^T D B dv \stackrel{\text{Así}}{=} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B^T D B) |\underline{J}| d\xi d\eta d\zeta = \int E(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

$E(\xi, \eta, \zeta)$ se calcula en puntos ξ_i, η_j, ζ_k y de acuerdo con algún esquema de integración numérica, vg.: Gauss, se buscan los correspondientes coeficientes de ponderación W_{ijk} .

Con ello

$$\underline{k} = \sum_{i,j,k} W_{ijk} F_{ijk}$$



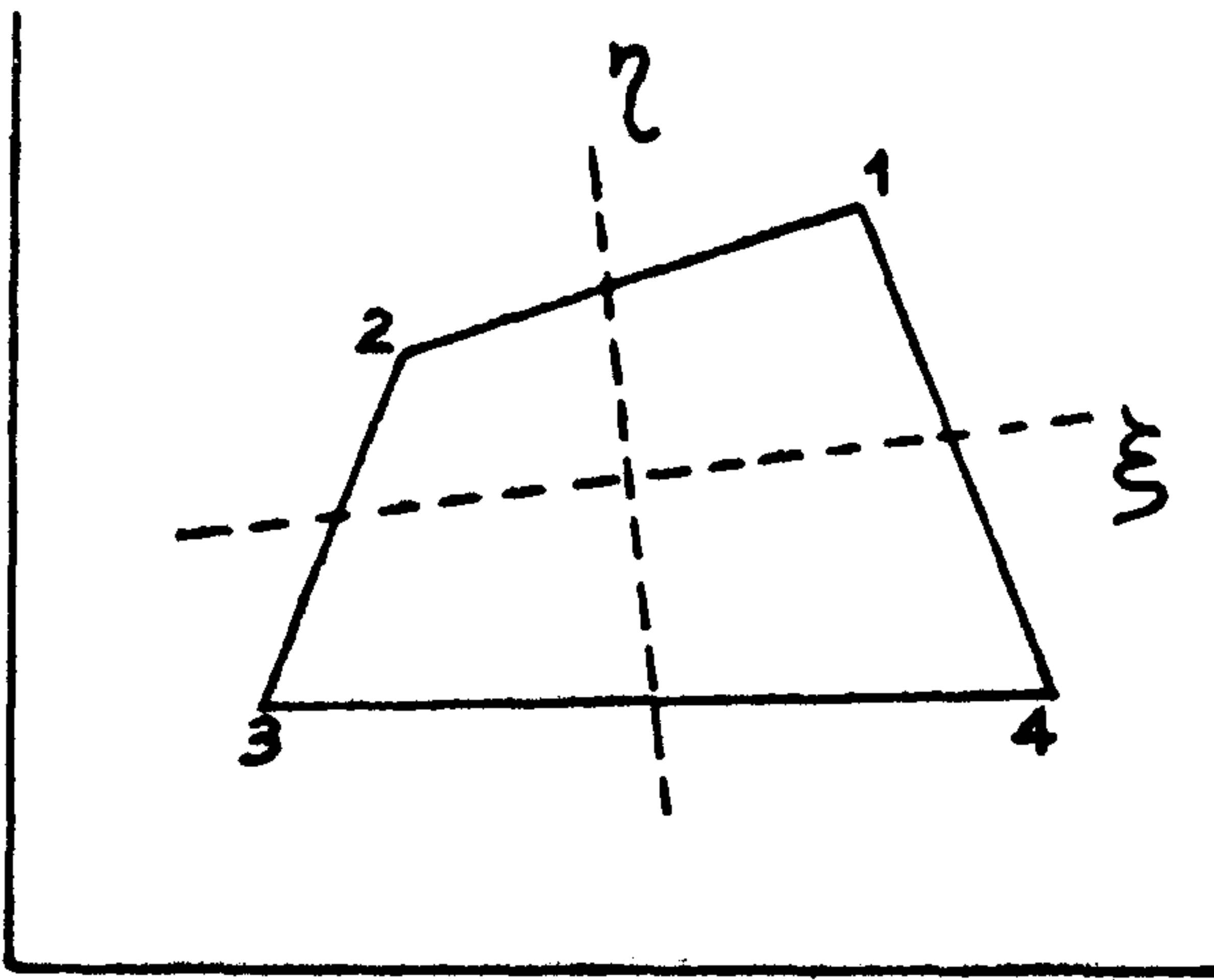
En un tetraedro cuadrático, por ejemplo

$$\text{Error : } O(h^3)$$

Punto	Coordenadas tetraedricas	Coeficiente de ponderación
a	$\alpha, \beta, \beta, \beta$	1/4
b	$\beta, \alpha, \beta, \beta$	1/4
c	$\beta, \beta, \alpha, \beta$	1/4
d	$\beta, \beta, \beta, \alpha$	1/4
$\alpha = 0.58541020, \quad \beta = 0.138119660$		

Ejemplo.

Calcular las expresiones necesarias en la matriz de rigidez del cuadrilatero de variación lineal



$$x = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_4$$

$$y = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_4$$

Analogamente

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)u_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)u_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)u_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)u_4 \\ v &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)v_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)v_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)v_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)v_4 \end{aligned} \right\}$$

Para sacar las deformaciones

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}(1+\eta)x_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_4 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}(1+\xi)(x_1 - x_4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(x_2 - x_3) \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(y_1 - x_2) + \frac{1}{4}(1-\eta)(y_4 - y_3) \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(x_1 - x_4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(y_2 - y_3) \end{cases}$$

Así para cada

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

$$-1 \leq \eta \leq 1$$

se puede calcular J.

Supongamos que el cálculo se ha hecho en

$$\begin{cases} \xi = \xi_i \\ \eta = \eta_j \end{cases} \rightarrow J_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} |_{ij} & \frac{\partial y}{\partial \xi} |_{ij} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} |_{ij} & \frac{\partial y}{\partial \eta} |_{ij} \end{pmatrix}$$

Podríamos calcular

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = J_{ij}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} |_{ij}$$

Las deformaciones se calcularían mediante ex presiones análogas

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)(u_1 - u_2) + \frac{1}{4}(1-\eta)(u_4 - u_3) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)(u_1 - u_4) + \frac{1}{4}(1-\xi)(u_2 - u_3) \end{cases} \quad \text{etc.}$$

con lo que

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\eta & 0 & -(1+\eta) & 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 \\ 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 \end{bmatrix} \underline{u}$$

Aplicando la relación

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}_{ij} = \underline{J}_{ij}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}_{ij}$$

y repitiendo para v podríamos calcular

$$\underline{\varepsilon}_{ij} = \underline{B}_{ij} \underline{u}$$

Hecho esto la cantidad subintegral en el punto ij es

$$\underline{F}_{ij} = \underline{B}_{ij}^T \underline{D} \underline{B}_{ij} | \underline{J}_{ij} |$$

donde \underline{D} es la matriz de características del material.

Si estamos en tensión plana y t_{ij} es el espesor del elemento en el punto (ξ_i, η_j)

$$\underline{K} = \sum_{i,j} t_{ij} W_{ij} \underline{F}_{ij}$$

En deformación plana $t_{ij} = 1$

También se podía haber partido directamente de

\underline{B} , \underline{J} ya que es, simplemente

$$\underline{B} = [\underline{B}_1, \underline{B}_2, \underline{B}_3, \underline{B}_4] \quad ; \quad \underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{N_i}{y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} =$$

$$= \underline{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Como en cualquier caso lo que se necesita son las ocho derivadas de las funciones de interpolación, en la implementación en ordenador se empieza calculandolas para cada punto ξ_i , η_j y luego se combinan tanto para calcular el Jacobiano como \underline{B} .

Así

1) Calculo de $\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \Big|_{ij}$ $\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \Big|_{ij} \dots$

$$2) \quad \underline{J}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \Big|_{ij} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \Big|_{ij} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \Big|_{ij} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \Big|_{ij} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \Big|_{ij} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} \Big|_{ij} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \Big|_{ij} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \Big|_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

3) $|\underline{J}|_{ij}$

4) \underline{B}_{ij}

5) $\underline{F}_{ij} = \underline{B}_{ij}^T \underline{D} \underline{B}_{ij} |\underline{J}_{ij}|$

6) $\underline{K} = \sum_{ij} t_{ij} w_{ij} \underline{F}_{ij}$

Para calcular la matriz de masa

$$\underline{M} = \int_D \underline{N}^T \underline{m} \underline{N} dv$$

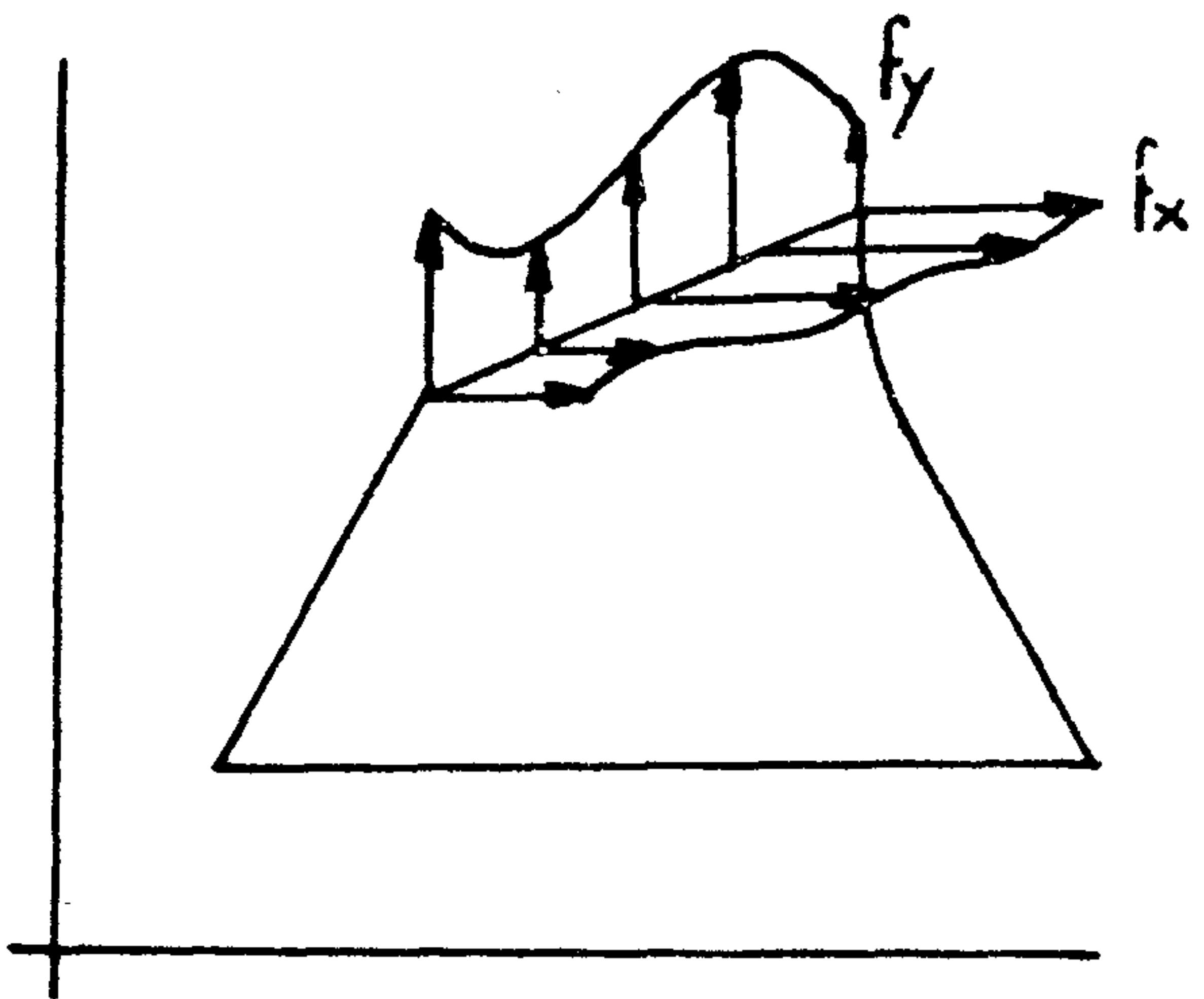
$$\underline{M} \approx \sum_{i,j} t_{ij} W_{ij} \underline{E}_{ij}$$

donde

$$\underline{E}_{ij} = m_{ij} \underline{N}_{ij}^T \underline{N}_{ij} \mid \underline{J}_{ij} \mid$$

$$y \underline{N}_{ij} = \frac{1}{4} \left[(1 + \xi_i)(1 + \eta_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (1 - \xi_i)(1 + \eta_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \right. \\ \left. (1 - \xi_i)(1 - \eta_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (1 + \xi_i)(1 - \eta_j) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Finalmente quedan por calcular las fuerzas -
nodales equivalentes a una distribución de tensiones en el borde.



En el lado 1 - 2 $\eta = 1$

$$u = \frac{1}{2}(1 + \xi)u_1 + \frac{1}{2}(1 - \xi)u_2$$

$$v = \frac{1}{2}(1 + \xi)v_1 + \frac{1}{2}(1 - \xi)v_2$$

Como $\underline{F}_{eq} = \int_{\partial D} \underline{N}^T \cdot \underline{T} ds$

$$\underline{N}^T = \frac{1}{2} \left[(1 + \xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; (1 - \xi) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

En cuanto a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 - x_2}{2} \xi ; \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_1 - x_2}{2} ; \quad -\frac{x}{\eta} = 0 \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_1 - y_2}{2} \xi ; \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{y_1 - y_2}{2} ; \quad -\frac{y}{\eta} = 0 \end{array} \right.$$

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{L}{2} d\xi$$

$$\int \underline{N}^T \cdot \underline{I} ds = \int_{-4}^4 \begin{bmatrix} (1+\xi) & (1-\xi) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} d\xi = \int_{-4}^4 \begin{bmatrix} (1+\xi) f_x \\ (1+\xi) f_y \\ (1-\xi) f_x \\ (1-\xi) f_y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi$$

nodo 1
nodo 2

2×1 8×1

En lugar de integrar se sigue haciendo

$$\underline{F} = \int_i^T \cdot \underline{I} \, d\xi$$

y

$$\underline{F}_q = \int_i t_i W_i \underline{F}_i$$

donde la integración es nondimensional.

Una cuestión del mayor interes consiste en determinar hasta que punto los elementos isoparamétricos mantienen las condiciones de convergencia. Evidentemente la compatibilidad interelemental queda asegurada desde el momento en que la variable de campo queda definida en función de los nodos de conexión.

En cuanto a la condición de complitud equivale a la existencia de los movimientos de solido rigido y los estados de deformación constante. Ello significa que un movimiento del tipo

$$u_p = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z$$

$$v_p = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 z$$

$$w_p = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z$$

debe ser posible.

En los elementos isoparamétricos

$$\begin{cases} u = \sum N_i u_i \\ v = \sum N_i v_i \\ w = \sum N_i w_i \end{cases}$$

Si se imponen movimientos nodales del tipo anterior

$$u = a_1 \sum N_i + a_2 \sum N_i x_i + a_3 \sum N_i y_i + a_4 \sum N_i z_i$$

$$v = b_1 \sum N_i + b_2 \sum N_i x_i + b_3 \sum N_i y_i + b_4 \sum N_i z_i$$

$$w = c_1 \sum N_i + c_2 \sum N_i x_i + c_3 \sum N_i y_i + c_4 \sum N_i z_i$$

Pero

$$\sum N_i x_i = x$$

$$\sum N_i y_i = y$$

$$\sum N_i z_i = z$$

luego

$$\begin{cases} u = a_1 \sum N_i + a_2 x + a_3 y + a_4 z \\ v = b_1 \sum N_i + b_2 x + b_3 y + b_4 z \\ w = c_1 \sum N_i + c_2 x + c_3 y + c_4 z \end{cases}$$

y para conseguir el estado deseado bastaría comprobar que

$$\sum N_i = 1$$

para cualquier punto del elemento, lo cual está en el punto de partida de todas las formulaciones. Por ejemplo en el rectángulo

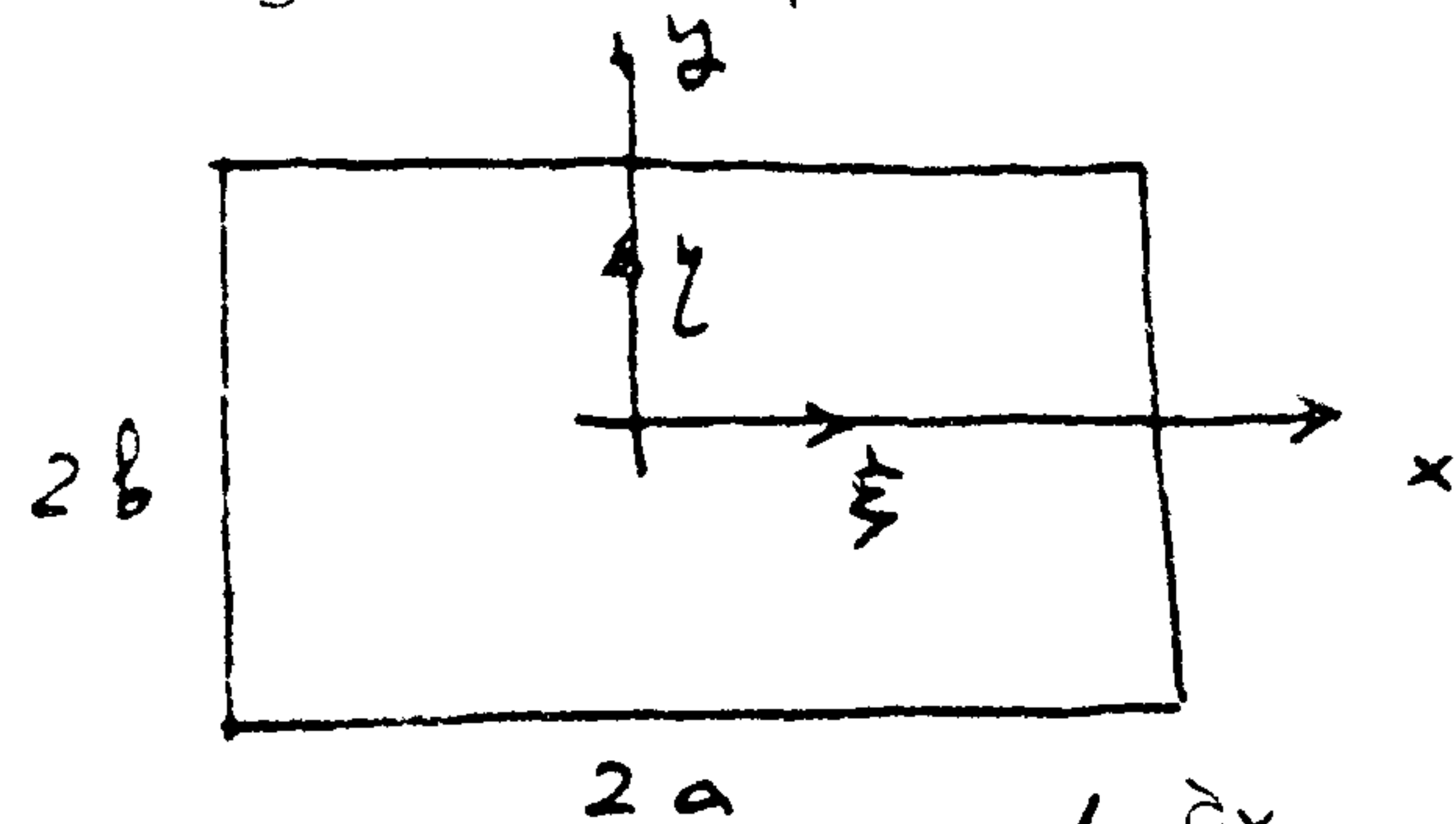
$$\frac{1}{4}(1+\eta)(1+\xi) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) = 1$$

Otro importante punto en el estudio de los elementos isoparamétricos es el orden de integración numérica que debe emplearse.

El problema estriba en que si se usa un orden muy bajo pueden producirse matrices singulares y un orden alto es caro.

Supongamos como ejemplo el rectángulo de la

figura en el que



$$\begin{cases} \xi = x / a \\ \eta = y / b \end{cases}$$

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad |\underline{J}| = \text{cte.}$$

Los elementos de \underline{B} son funciones de ξ ó η . En la matriz de rigidez $\underline{F} = \underline{B}^T \underline{C} \underline{B} |\underline{J}|$ es función de ξ^2, η^2, ξ, η , luego bastará buscar un orden de integración que use interpolación de 2º grado. Si se usa Gauss Legendre n puntos permiten integrar exactamente polinomios de grado $2n-1$.

Si

$$n = 1 \rightarrow 2n - 1 = 1 < 2$$

$$n = 2 \rightarrow 2n - 1 = 3 < 2$$

luego bastará un esquema de Gauss de dos puntos.

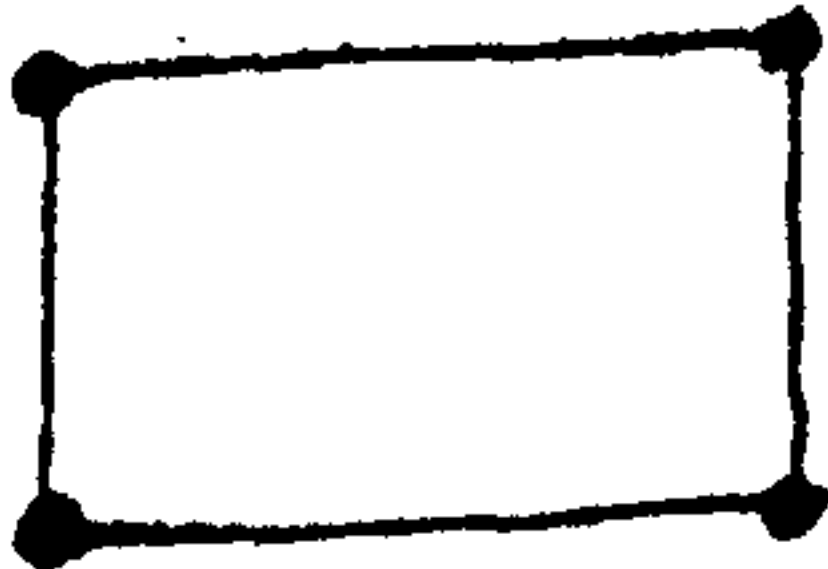
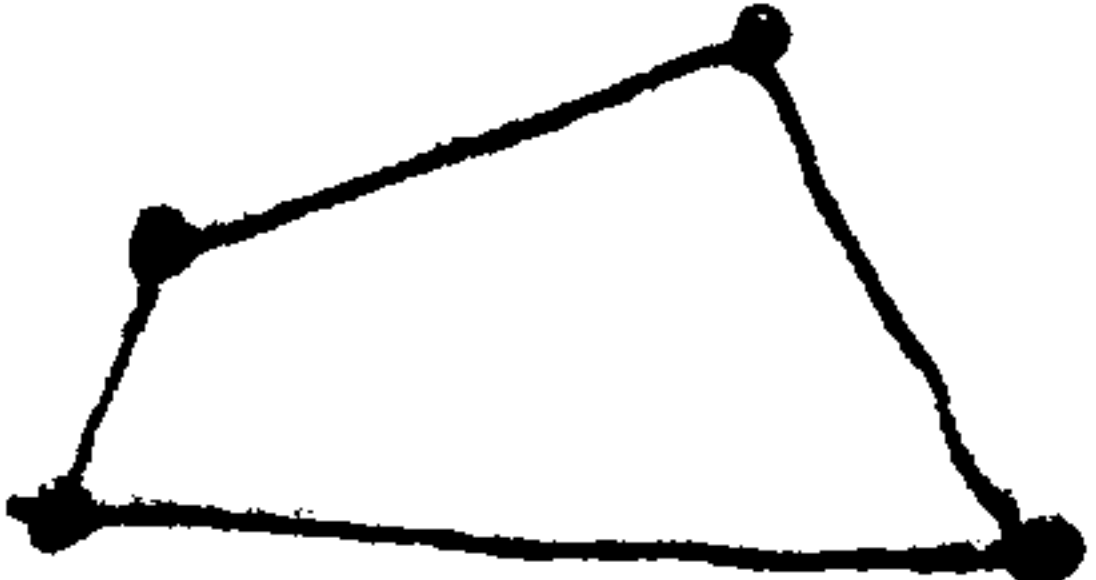
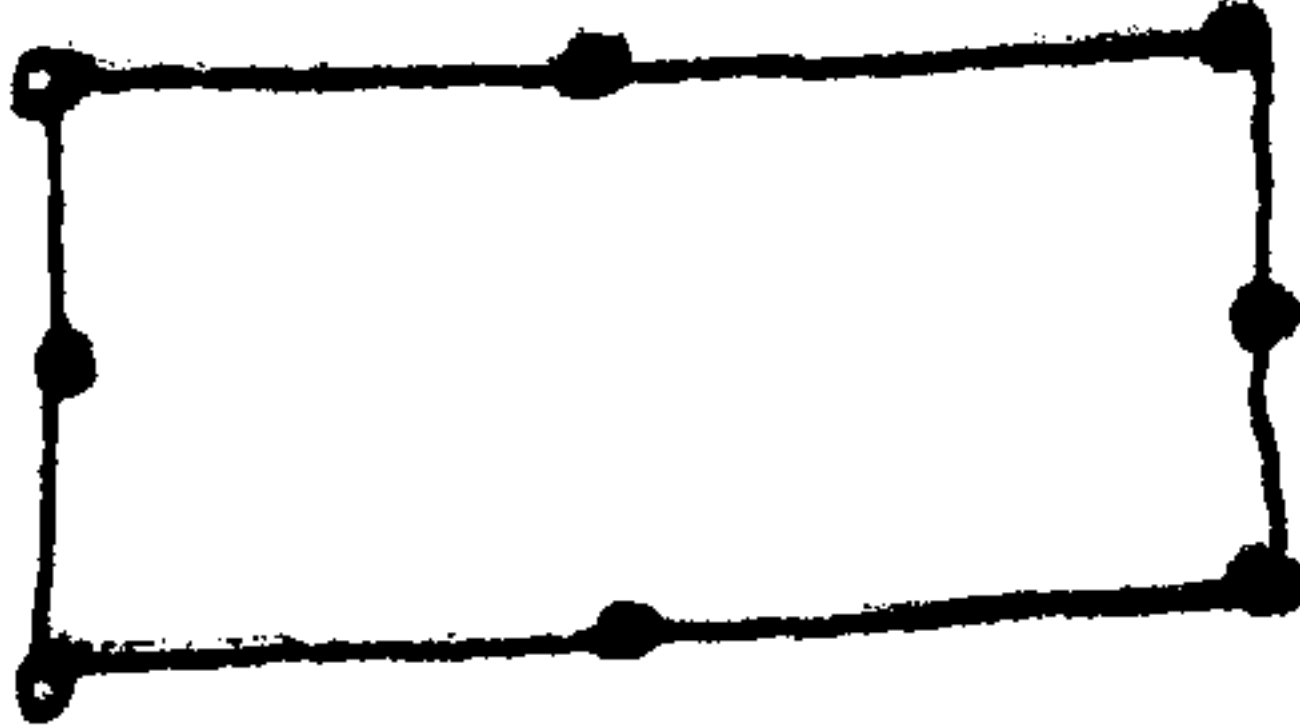
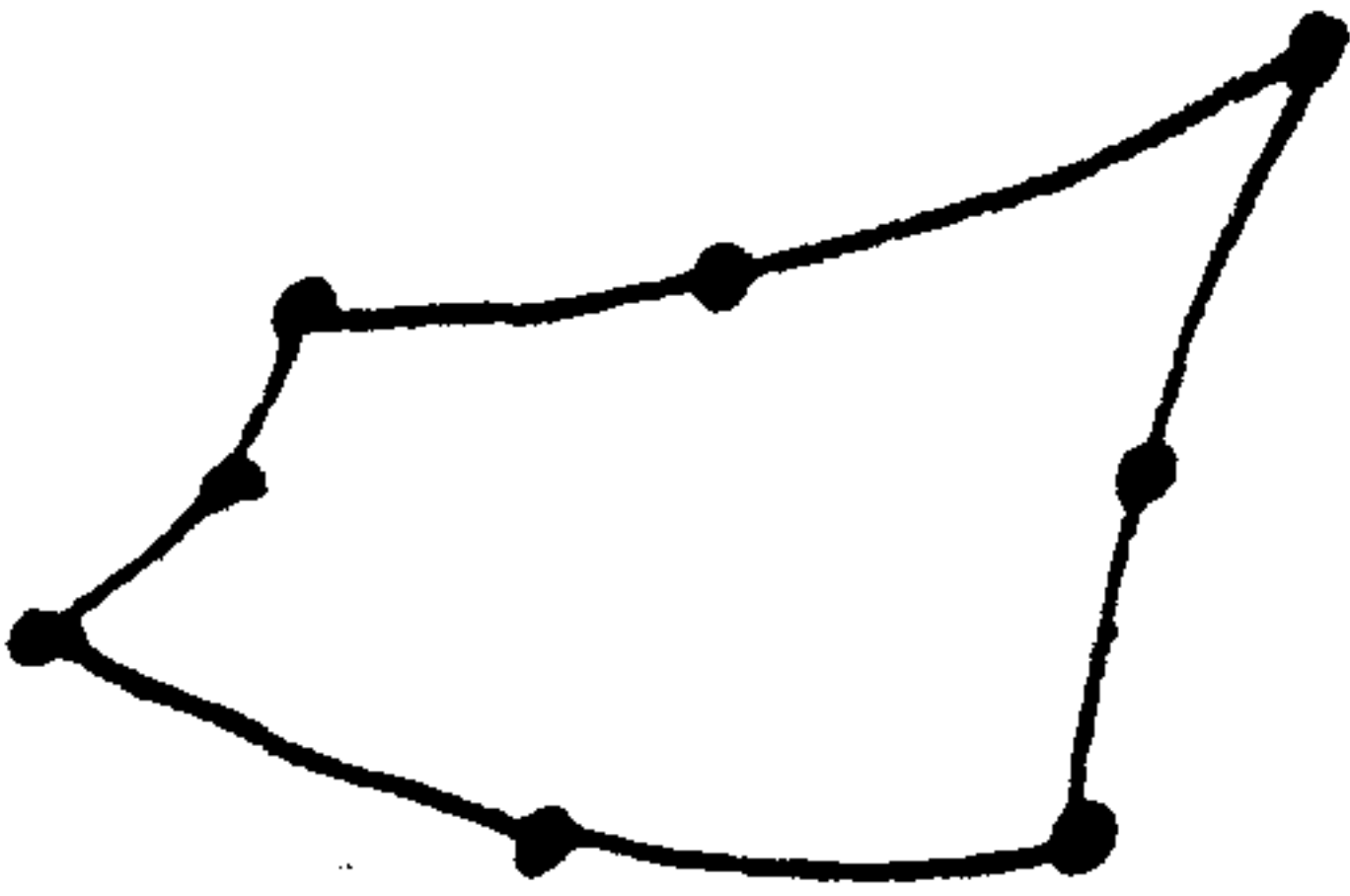
Si en lugar de un rectángulo se hubiera tenido un cuadrilátero el $|\underline{J}|$ no hubiera sido constante y habría sido preciso un orden superior.

De la misma forma pueden analizarse los diversos casos que se presentan. El problema consiste en que, a veces, un orden de integración inferior al estrictamente necesario produce mejores resultados que una integración exacta.

Una explicación intuitiva del hecho se obtiene pensando que el F.E.M. en movimientos implica una hipótesis sobre éstos y por tanto al obligar a que la estructura se deforme según aquélla estamos introduciendo constricciones que aumentan su rigidez.

Una integración reducida puede compensar este hecho y mejorar los resultados finales. Como advertíamos antes el problema estriba en el hecho de que un orden excesivamente bajo puede producir problemas de mal condicionamiento.

El tema ha merecido considerablemente atención y puede analizarse con mas detalle en el texto de ZIENCKIEWICKZ citado en la bibliografía.

Bathe y Wilson aconsejan los siguientes valores		
Elemento	Orden de Integración usualmente óptimo	Orden de integración máximo
	2 x 2	2 x 2
	2 x 2	3 x 3
	2 x 2	3 x 3
	3 x 3	4 x 4

El problema está relacionado con el uso de funciones de substitución que, mediante una aproximación a nivel elemental, mejoran también los resultados globales.

Por supuesto con estos artificios desaparece la posibilidad de evaluar cotas sobre la energía potencial real del problema.

6.- Elementos incompatibles. El Patch Test.

Según se ha indicado en el apartado anterior una integración equivocada puede producir mejoras en los resultados si contribuye a aproximar la rigidez del modelo en E.F. a la del cuerpo real.

Una alternativa a este modo de proceder es el uso de funciones de forma incompatibles, que, por tanto provocan una imprecisión

sibilidad de afirmación del grado de convergencia a la solución; por lo menos de convergencia monótona.

Existen elementos incompatibles para una diversidad de problemas, de los cuales el más popular es el paralelepípedo de Wilson, o rectángulo Q 6 en dos dimensiones.

Según se vió en el apartado 4.3 el rectángulo lineal es incapaz de recoger las deformaciones de flexión y por ello Wilsson tuvo la idea de añadirle dos funciones anodales internas P_i tales que

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \underline{u}_i + \sum_{i=1}^2 P_i \underline{a}_i$$

donde

$$P_1 = (1 - \xi^2)$$

$$P_2 = (1 - \eta^2)$$

Puesto que

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\underline{B}_1 \underline{B}_2 \underline{B}_3 \underline{B}_4] \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \end{Bmatrix} + [\underline{G}_1 \underline{G}_2] \begin{Bmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\underline{G}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial P_i}{\partial y} \\ \frac{\partial P_i}{\partial y} & \frac{\partial P_i}{\partial x} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez puede particionarse de modo que

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_u & \underline{K}_{ua} \\ \underline{K}_{au} & \underline{K}_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \end{Bmatrix}$$

donde el proceso de trabajos virtuales conduce a

$$\underline{K}_{u|ij} = \int_D \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j dv$$

$$\underline{K}_{ua|ij} = \int_D \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{G}_j dv = \underline{K}_{au|ji}$$

$$\underline{K}_{aa|ij} = \int_D \underline{G}_i^T \underline{D} \underline{G}_j dv$$

$$\underline{F}_i = \int_V \underline{N}_i \underline{f} dv + \int_{\partial D} \underline{N}_i \underline{T} ds$$

Siguiendo el proceso habitual

$$\underline{K}_{au} \underline{u} + \underline{K}_a \underline{a} = \underline{0}$$

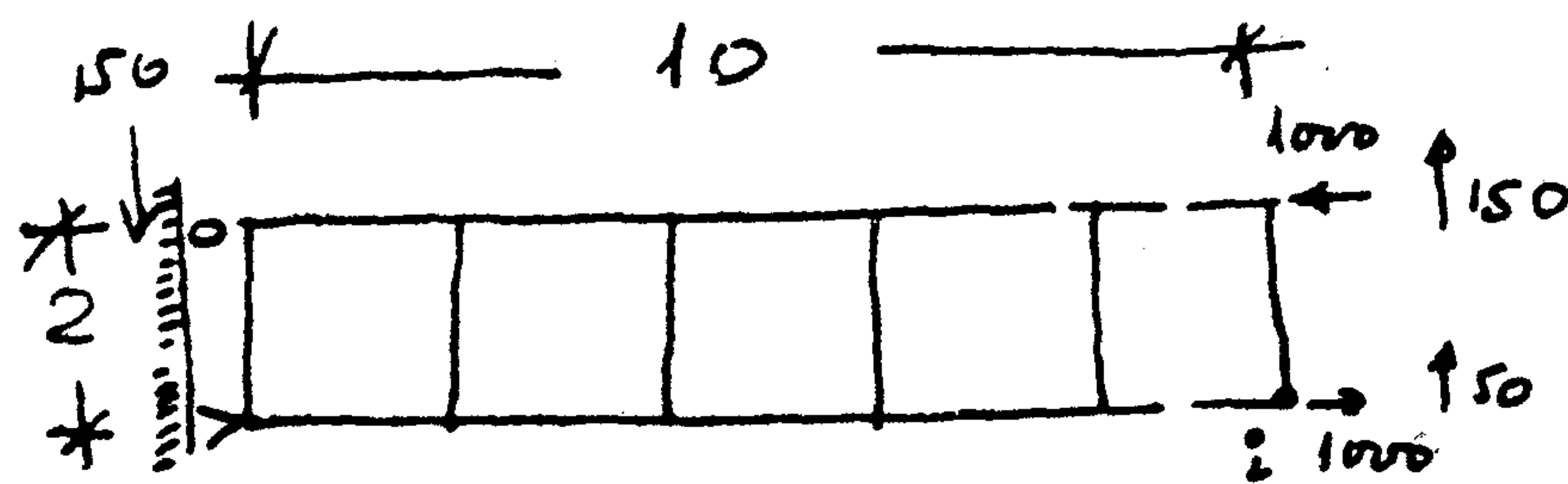
$$\underline{a} = -\underline{K}_a^{-1} \underline{K}_{au} \underline{u}$$

y

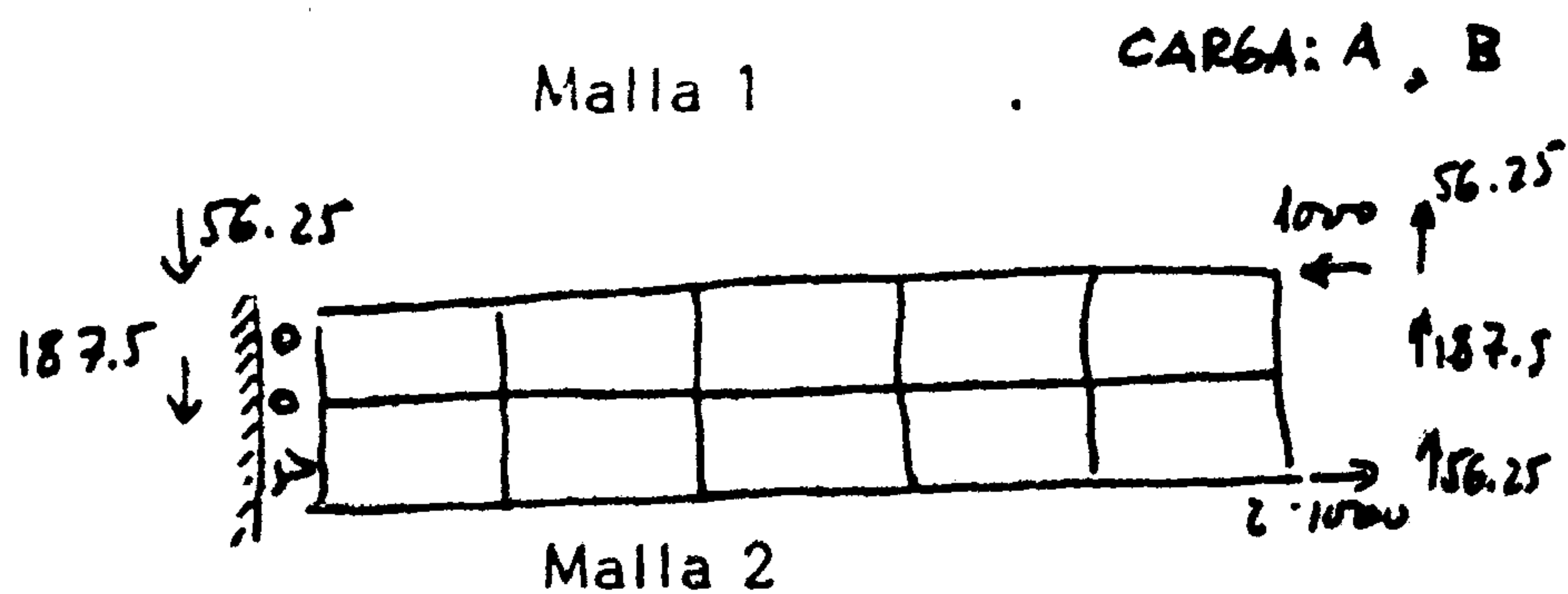
$$(\underline{K}_u - \underline{K}_{ua} \underline{K}_a^{-1} \underline{K}_{au}) \underline{u} = \underline{F}$$

permite condensar y calcular la matriz de rigidez efectiva.

Entre los numerosos ejemplos presentados por Wilson, Taylor, Doherty y Ghaboussi, el más espectacular corresponde a la viga en voladizo de la figura.



Q.4 es el cuadrilatero isoparamétrico tipo y
Q.6 el rectángulo incompatible presentado.



Los buenos resultados desaparecen sin embargo si en lugar de rectangulos o paralelogramos se utiliza un cuadrilatero cualquiera.

TENSION PLANA

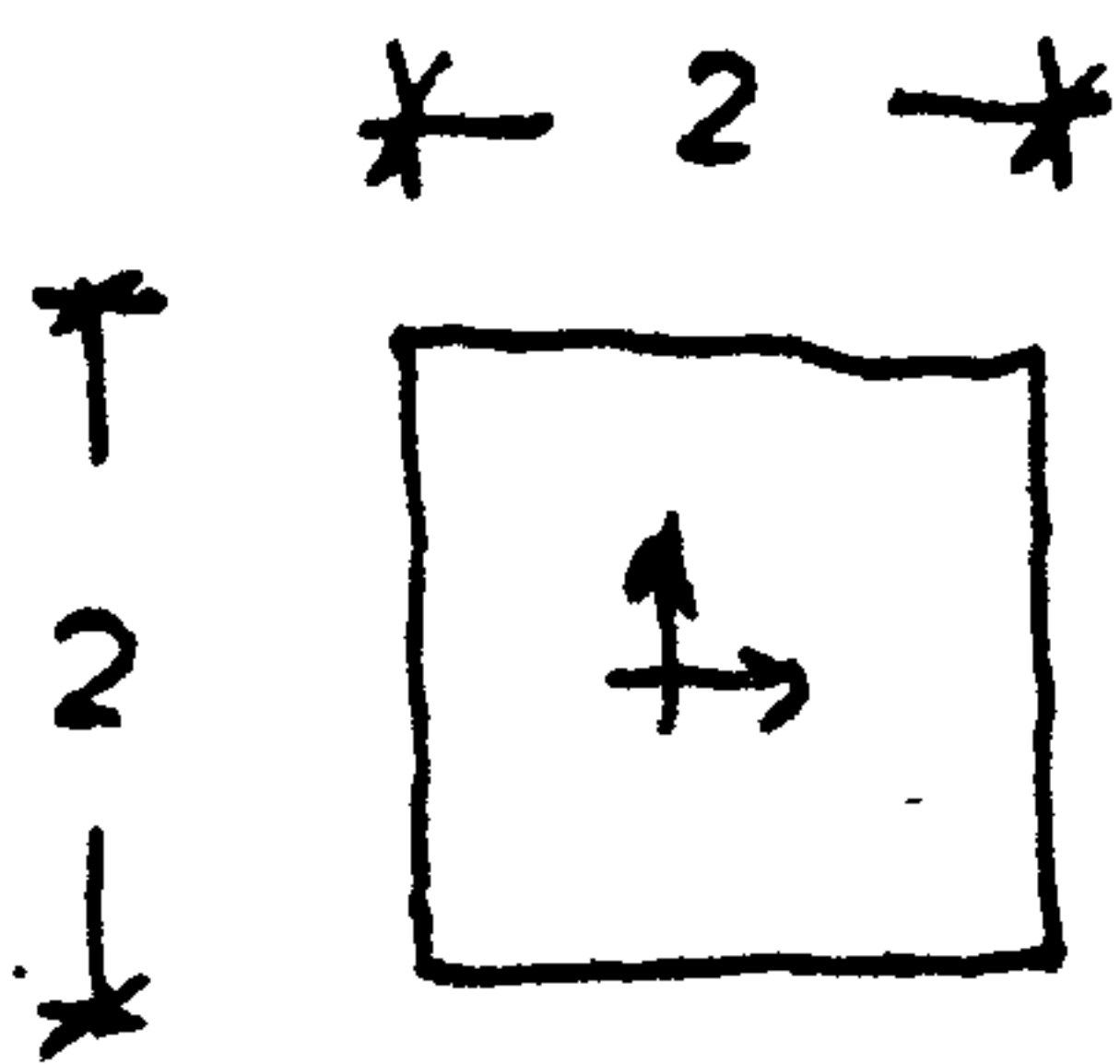
	<u>Mov. en i</u>	
	Carga A	Carga B
R. de Mat.	10.00	103.0
Q.4 Malla 1	6.81	70.1
Q.4 Malla 2	7.06	72.3
Q.6 Malla 1	10.00	101.5
Q.6 Malla 2	10.00	101.3

Con objeto de mejorar el rendimiento Taylor, Beresford y Wilson han analizado el comportamiento del elemento cuando se ve sometido al Patch-test de Irons.

La idea del Patch-test consiste en comprobar la complitud en forma macroscópica en un conjunto arbitrario de elementos, y razonar que sí dicho "patch" es capaz de representar correctamente los estados de deformación constante, en el limite la falta de compatibilidad no influirá en el resultado.

Obsérvese que las discontinuidades en el movimiento supondrian deformaciones infinitas y por tanto sumandos infinitos - en el teorema de los trabajos virtuales que, simplemente, son ignorados.

Veamos como pasa un elemento rectangular el Patch-test.



Sea el estado

$$u = ax + b$$

que produce

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a \\ \varepsilon_y = 0 \\ \varepsilon_{xy} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Hooke}}$$

$$\begin{cases} Ea = (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ 0 = (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{cases} \quad \begin{cases} Ea = \sigma_x (1 - \nu^2) \\ \sigma_y = \nu \sigma_x \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} a \\ \sigma_y = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} a \end{cases}$$

$$k_{ij} = \int_D \varepsilon_i \sigma_j dv = \int a \frac{E}{1 - \nu^2} dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a \frac{E}{1 - \nu^2} d\xi d\eta = 0$$

$$dv = |J| dx dy \quad |J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Es decir no hay fuerzas relacionadas con este tipo de movimientos.

Si interviniesen las funciones añadidas inter-
vendría también

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) = -2\xi$$

y en las integrales aparecería

$$a \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 -2\xi d\xi d\eta = 0$$

por lo que, a pesar de todo se cumple el proceso.

Como

$$\underline{a} = -\underline{K}_a^{-1} \underline{K}_{au} \underline{u}$$

una forma de que no intervinieran los modos incompatibles en el Patch-test seria que

$$\underline{a}_0 = 0 \text{ si } \underline{u} = \text{mov. lineal} = \underline{u}_0$$

Como

$$\underline{a}_0 = -\underline{K}_a^{-1} \underline{K}_{au} \underline{u}_0 = -\underline{K}_a^{-1} \int_{D^e} \underline{G}^T \underline{D} \underline{B} \underline{u}_0 \, dv$$

$$\text{y } \underline{D} \underline{B} \underline{u}_0 = \underline{\sigma}_0$$

donde $\underline{\sigma}_0$ es un estado de tensión constante

$$\underline{a}_0 = -\underline{K}_a^{-1} \left[\int \underline{G}^T \, dv \right] \underline{\sigma}_0 = 0$$

Por lo tanto la condición buscada es

$$\int \underline{G} \, dv = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \underline{G}_1 \, dv = 0 \\ \int \underline{G}_2 \, dv = 0 \end{array} \right.$$

Pero

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} P_1 = 1 - \xi^2 \\ P_2 = 1 - \eta^2 \end{cases}$$

Como el denominador es el Jacobiano, desaparece con el necesario (al integrar) para transformar la unidad de volumen.

Por ello basta fijarse en los términos del nume-
rador

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad \frac{\partial P_1}{\partial \xi} = -2\xi \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \frac{\partial P_1}{\partial \xi} = 2\xi \frac{\partial x}{\partial \eta}$$

Con ello

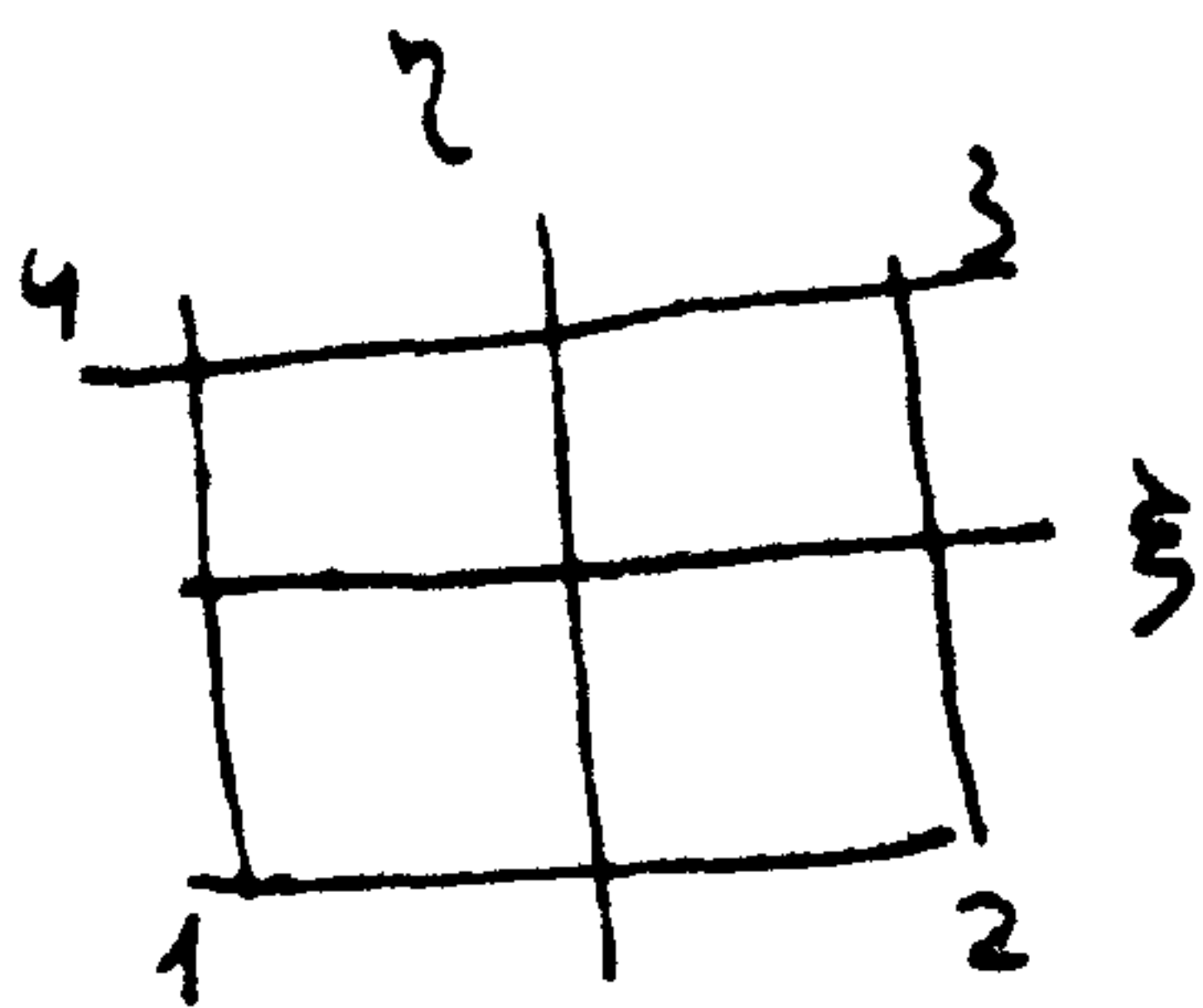
$$\int G_1 dv = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -\xi \frac{\partial y}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & +\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \xi \frac{\partial x}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} d\xi d\eta$$

y semejante para G_2 .

Si las derivadas fueran constantes todas las integrales se anularían, pero en el caso del cuadrilátero general no es así,

ya que, por ejemplo,

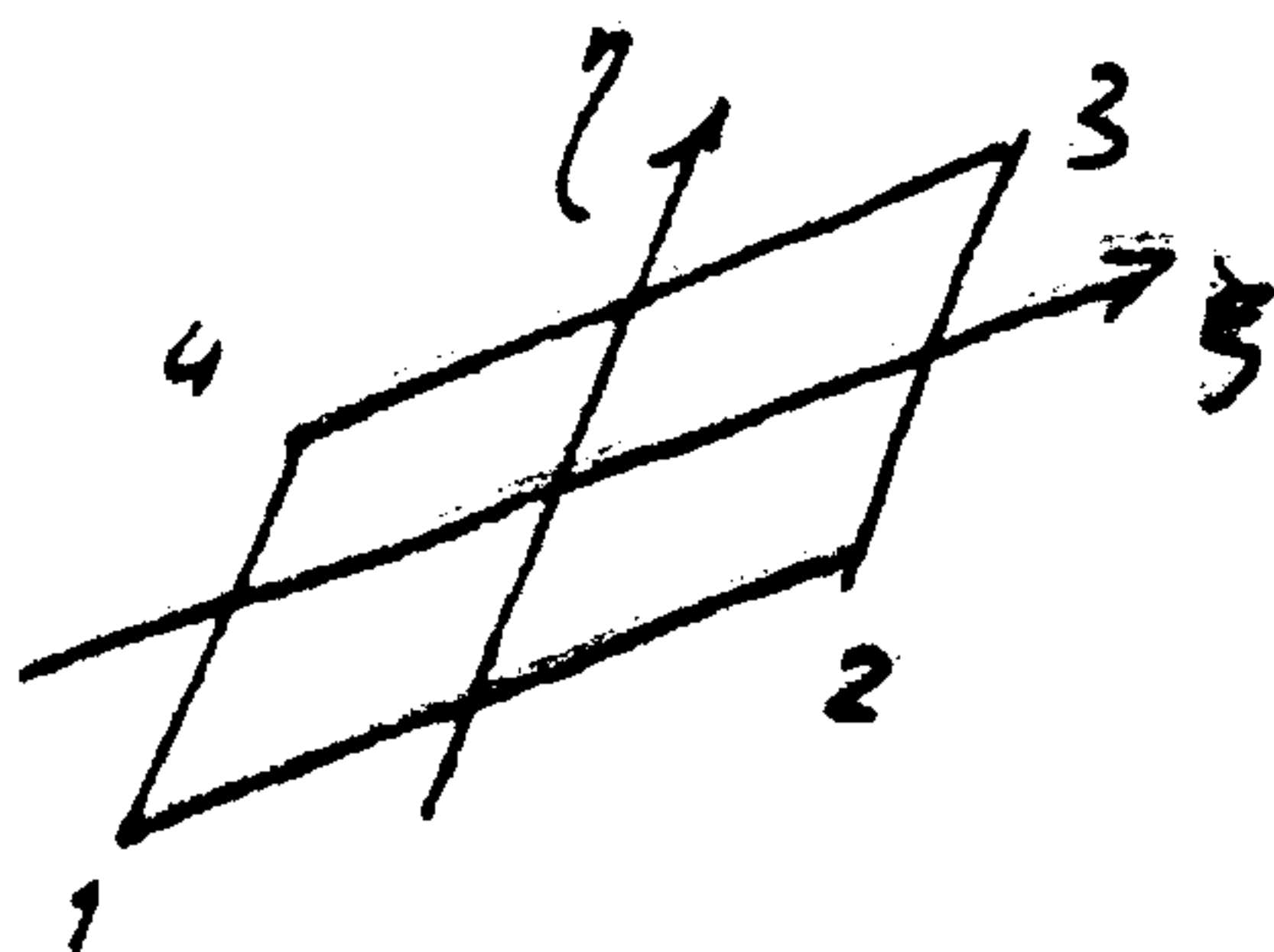
$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} [- (1 - \xi) y_1 - (1 + \xi) y_2 + (1 + \xi) y_3 + (1 - \xi) y_4] = \\ &= \frac{1}{4} [(1 + \xi) (y_3 - y_2) + (1 - \xi) (y_4 - y_1)]\end{aligned}$$



En el caso de un rectángulo

$$\left. \begin{array}{l} y_3 = -y_2 \\ y_4 = -y_1 \end{array} \right| \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{2} [1 + \xi + 1 - \xi] = 1$$

y lo mismo sucede en el paralelogramo



$$y_3 - y_2 = y_4 - y_1$$

Pero si

$$y_3 - y_2 \neq y_4 - y_1 \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = f(\xi)$$

y lo mismo sucede con el resto.

El truco propuesto consiste en evaluar las derivadas para $\xi = \eta = 0$ en cuyo caso se obtiene el mismo resultado anterior. Esta modificación se realiza en todos los términos en que aparece G y produce buenos resultados.

LECCION 4

METODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS.

1.- Un ejemplo instructivo.

Consideremos el equilibrio de una rebanada en flexión, en una viga recta

$$\begin{array}{l} \dots(1) \quad \forall x \in \text{viga} \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = p \quad \rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} a(M)=0 \quad A = \frac{d^2}{dx^2} - p \end{array} \right\} \dots(1)' \\ \\ \dots(2) \quad \forall x \in \text{borde libre} \quad \left\{ \begin{array}{l} M = 0 \\ \frac{dM}{dx} = 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} B_1(M)=0 \quad B_1 = 1. \\ B_2(M)=0 \quad B_2 = \frac{d}{dx} \end{array} \right\} \dots(2)' \end{array}$$

Con objeto de aplicarle la teoría estudiada, conviene tener una igualdad bajo signo integral que, en el momento adecuado pueda ser descompuesta en integrales sobre dominios elementales.

Supongamos una función cualquiera $v(x)$, en principio sin ningún significado físico. Es evidente que, si se cumple (1), también se cumple

$$\int_{\text{viga}} v(x) \left[\frac{d^2 M}{dx^2} - p \right] dx = 0 \quad \dots(3)$$

y, reciprocamente, si (3) se cumple para cualquier $v(x)$, ello implica (1), ya que en caso contrario sería posible de forma inmediata encontrar un $v(x)$ que deshiciera (3).

Igualmente, como (2) está particularizado en el extremo

$$\begin{array}{l} v(L) \quad M(L) = 0 \\ v(L) \quad \left. \frac{dM}{dx} \right|_L = 0 \end{array} \quad \dots(4)$$

Uniendo (3) y (4) podrían escribirse todas las condiciones del problema en la forma

$$\int_D v \left(\frac{d^2 M}{dx^2} - p \right) dx + v_L M_L + v_L \left. \frac{dM}{dx} \right|_L = 0 \quad \dots(5)$$

El proceso de aproximación descrito en el F.E. M. podría utilizarse en la integral del primer miembro, mediante una subdivisión en elementos $D^e / \cup D^e = \bar{D}$ y una hipótesis

$$\hat{M} = \underline{N} \quad \underline{\delta} \quad \dots(6)$$

Obsérvese que, puesto que bajo el signo integral aparecen derivadas segundas, la hipótesis (6) implica funciones C^1 . Las incógnitas de la aproximación serían los parámetros δ y prescindiendo de las condiciones de contorno, (5) sería

$$\int_D v \left(\frac{d^2 N}{dx^2} - p \right) dx \cdot \underline{\delta} = 0 \quad \dots(7)$$

Puesto que

$$M = \hat{M} + \text{error} = \underline{N} \quad \underline{\delta} + \varepsilon$$

$$\varepsilon = M - \underline{N} \quad \underline{\delta}$$

$$e = \frac{d^2 M}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^2} (\underline{N} \quad \underline{\delta}) = p - \frac{d^2}{dx^2} (\underline{N} \quad \underline{\delta})$$

... (8)

(7) puede escribirse

$$\int_D v \cdot e \, dx = 0 \quad \dots(9)$$

donde e es el error introducido por la hipótesis (6) en el cálculo de la derivada segunda.

La interpretación de (9) conduce a la idea de que, mediante el artificio de multiplicación por una función arbitraria y posterior integración del producto en el dominio se está ponderando el error o residuo de la hipótesis. Si ésta depende de n parámetros $\underline{\delta}$, el uso de n funciones v permite establecer n ecuaciones (9) que servirán para calcular $\underline{\delta}$.

Estas son, en esencia, las ideas subyacentes en el método de los residuos ponderados (MWR).

Otra alternativa consiste en tratar, mediante integración por partes el primer miembro de (5).

Con ello se tiene

$$\int_D v \frac{d^2 M}{dx^2} = \left\{ \begin{array}{l} v \\ \frac{d}{dx} (M') \\ \frac{dv}{dx} dx \\ M' \end{array} \right\} = v M' \Big|_0^L - \frac{dv}{dx} \frac{dM}{dx} dx = v_L M'_L - v_0 M'_0 - \int v' M' dx$$

Si en lugar de sumar las condiciones (4) se restasen tendríamos

$$\int \left(\frac{dv}{dx} \frac{dM}{dx} + pv \right) dx + v_0 M'_0 + v_L M'_L = 0 \quad \dots(10)$$

Con ello se ha conseguido rebajar la exigencia C^1 a C^0 a costa de establecer C^1 para v .

Es lo que se llama una suavización de la formulación, o formulación débil (weak formulation).

Finalmente se puede repetir el proceso a costa de mayores exigencias sobre v .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dx} \\ \frac{d}{dx} M \\ \frac{d^2 v}{dx^2} \\ M \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dv}{dx} M \Big|_0^L - \int \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 M - pv) dx + v_0 M'_0 + v_L M'_L = 0$$

Si en lugar de restar se hubiera sumado $\frac{dv}{dx} \Big|_L M_L$

tendríamos finalmente

$$\int_0^L \frac{d^2 v}{dx^2} (M - vp) dx - v_0 M'_0 + v'_0 M_0 = 0$$

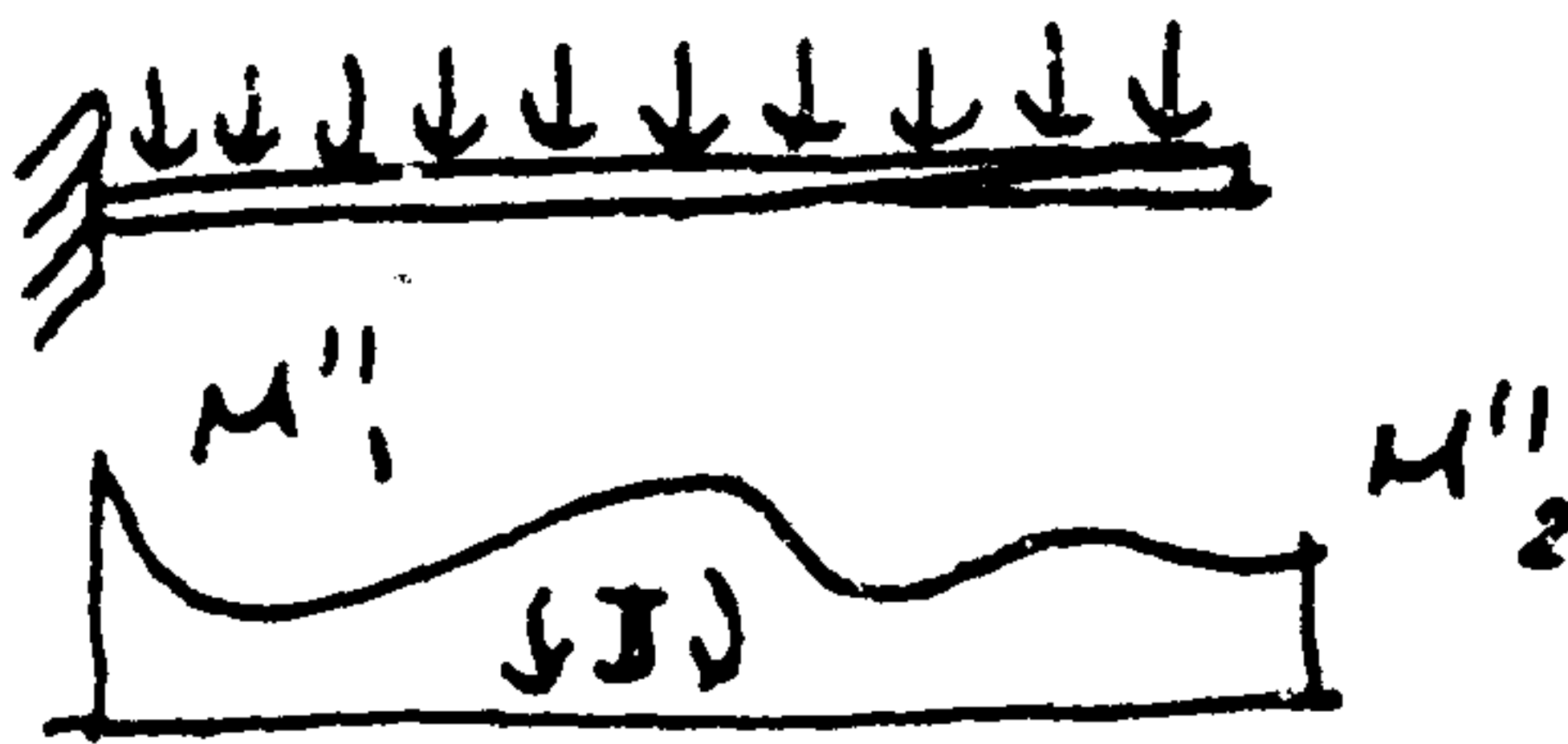
Si ahora se identifica v_0 con una deformada compatible tendríamos el teorema de los trabajos virtuales

$$\int_0^L \frac{d^2 v}{dx^2} M = \int_0^L p v dx$$

Ejemplo

Sea el caso bosquejado antes en el que $p(x) = p =$

$= \text{cte.}$



Hagamos la hipótesis lineal

$$M'(x) = \left[1 - \frac{x}{L} ; \frac{x}{L} \right] \begin{Bmatrix} M''_1 \\ M''_2 \end{Bmatrix}$$

Necesitamos determinar 2 incógnitas, por lo que usamos dos funciones de ponderación

$$v_1 = 1$$

$$v_2 = x$$

Las ecuaciones obtenidas son

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) M_1'' + \frac{x}{L} M_2'' \right] dx = \int_0^L p dx = pL \\ \int_0^L \left[\left(x - \frac{x^2}{L}\right) M_1'' + \frac{x^2}{L} M_2'' \right] dx = \int_0^L p x dx = \frac{p}{2} L^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1'' L + \frac{(M_2'' - M_1'')}{2} L = pL \rightarrow M_1'' + M_2'' = 2p \\ \frac{M_1''}{2} L^2 + \frac{M_2'' - M_1''}{3} L^2 = \frac{pL^2}{2} \rightarrow 2M_2'' + M_1'' = 3p \end{array} \right.$$

De ellas

$$\boxed{M_1'' = M_2'' = p}$$

por lo que

$$M''(x) = p$$

y por integración

$$M(x) = \frac{1}{2} p x^2 + c_1 x + c_2$$

Las dos constantes se determinan por las condiciones de contorno

$$x = L \quad \left\{ \begin{array}{ll} M = 0 & 0 = pL^2 + 2Lc_1 + 2c_2 \\ M' = 0 & 0 = pL^2 + c_1 L \end{array} \right. \rightarrow c_1 = -pL$$

$$2c_2 = pL^2; c_2 = \frac{pL^2}{2};$$

$$\boxed{M(x) = \frac{1}{2} p (L - x)^2}$$

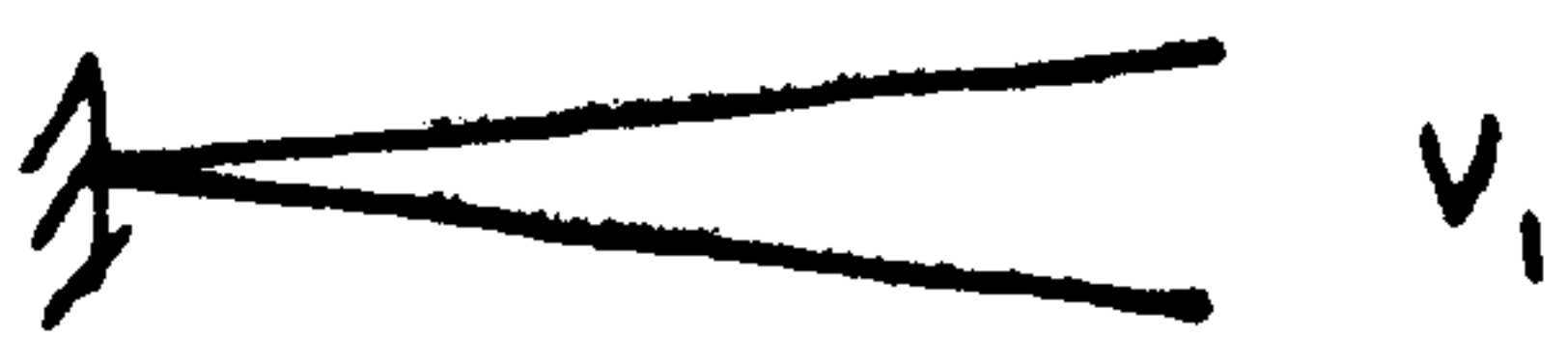
Cuando en realidad

$$M(x) = \frac{p(L-x)(L+x)}{2} = \frac{p}{2} (L^2 - x^2)$$

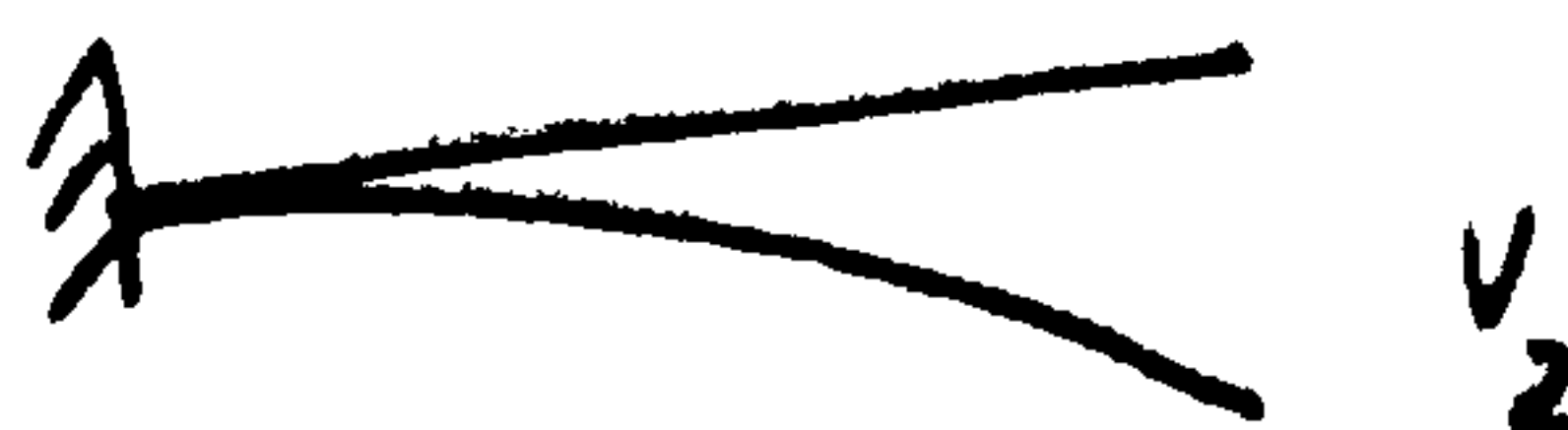
En el caso de integración por partes una vez

$$M'(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) M'_1 + \frac{x}{L} M'_2$$

Consideremos dos funciones C


 v_1

$$v_1 = x ; \quad \int p v_1 dx = \frac{p}{2} L^2.$$


 v_2

$$v_2 = \frac{1}{2} x^2 ; \quad \frac{1}{2} \int p v_2 dx = \frac{p}{6} L^3$$

$$\int_{v_1} M' dx = \int \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) M'_1 + \frac{x}{L} M'_2 \right] dx = \frac{M'_1 + M'_2}{2} \cdot L$$

$$\int_{v_2} M' dx = \int \left[x \left(1 - \frac{x}{L}\right) M'_1 + \frac{x^2}{L} M'_2 \right] dx = \frac{2 M'_2 + M'_1}{6} L^2$$

Por ello

$$\left. \begin{array}{l} M'_1 + M'_2 = -pL \\ M'_1 + 2M'_2 = -pL \end{array} \right\} \quad M'_2 = 0 ; \quad M'_1 = -pL$$

$$M'(x) = - \left(1 - \frac{x}{L}\right) pL$$

$$M(x) = -pL \left(x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L}\right) + c_1$$

$$M(L) = 0 \rightarrow c_1 = +pL \left(L - \frac{1}{2} L\right) = +p \frac{L^2}{2}$$

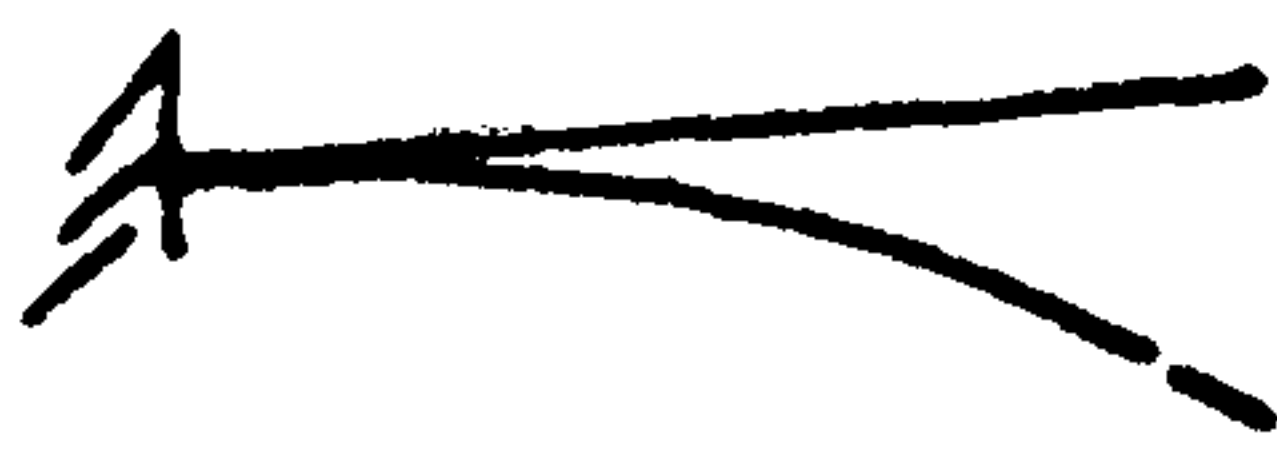
$$\left[M(x) = +p \frac{L^2}{2} + pLx - \frac{p}{2} x^2 = +\frac{p}{2} (L-x)^2 \right]$$

que es la misma aproximación anterior.

Finalmente consideremos la aplicación del teorema de los trabajos virtuales. Tomando dos deformadas compatibles C^1



$$v_1 = \frac{1}{2} x^2 \quad ; \quad v_1' = x \quad ; \quad v_1'' = 1 \quad ; \quad \int p v_1 dx = \frac{p}{6} L^3$$



$$v_2 = \frac{1}{6} x^3 \quad ; \quad v_2' = \frac{1}{2} x^2 \quad ; \quad v_2'' = x \quad ; \quad \int p v_2 dx = \frac{p}{24} L^4$$

$$M(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) M_1 + \frac{x}{L} M_2$$

$$\int_0^L v_1'' M dx = \frac{M_1 + M_2}{2} L$$

$$\int_0^L v_2'' M dx = \frac{2M_2 + M_1}{6} L^2$$

Por ello

$$M_1 + M_2 = pL^2 / 3$$

$$M_1 + 2M_2 = pL^2 / 4$$

Restando

$$M_2 = pL^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = - \frac{1}{12} pL^2$$

$$M_1 = pL^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{12} pL^2$$

Es decir

$$M(x) = \frac{5}{12} pL^2 + \frac{M_2 - M_1}{L} x = \frac{5}{12} pL^2 - \frac{6}{12} pL x$$

2.- El método de los residuos ponderados.

El método de los residuos ponderados en general sigue exactamente los pasos desarrollados en el ejemplo anterior. Dada una ecuación o sistema de ecuaciones sobre un dominio D y su contorno ∂D

$$\underline{A}(\underline{u}) = \begin{Bmatrix} A_1(\underline{u}) \\ A_2(\underline{u}) \\ \vdots \\ A_n(\underline{u}) \end{Bmatrix} = 0 \quad \underline{u} \in D \quad \dots(11)$$

$$\underline{B}(\underline{u}) = \begin{Bmatrix} B_1(\underline{u}) \\ \vdots \\ B_n(\underline{u}) \end{Bmatrix} = 0 \quad \underline{u} \in \partial D$$

se establece una expresión

$$\int_D \underline{w}^T \underline{A}(\underline{u}) \, dv + \int_{\partial D} \underline{w}^T \underline{B}(\underline{u}) \, da = 0 \quad \dots(12)$$

donde

$$\underline{w}^T = (w_1 ; w_2 ; \dots ; w_n)$$

que es equivalente a ... (11) si se establece que w puede ser cualquiera.

La aproximación siguiente

$$\underline{u} \approx \underline{N} \underline{\delta}$$

significa la aparición de unos parámetros $\underline{\delta}$ que se obtienen resolviendo el sistema resultante de aplicar n funciones \underline{w}_i . Así

$$\int_D \underline{w}_i^T \underline{A}(\underline{N} \underline{\delta}) \, dv + \int_{\partial D} \underline{w}_i^T \underline{B}(\underline{N} \underline{\delta}) \, da = 0 \quad \dots(13)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

d) Método de los mínimos cuadrados (GAUSS 1795)

Se usan como funciones de ponderación las derivadas del error respecto a las funciones de forma

$$w_i = \frac{\partial A(\underline{N}, \underline{\delta})}{\partial N_i}$$

lo que equivale a minimizar

$$I = \int_D \underline{A}^T(\underline{N}, \underline{\delta}) \cdot \underline{A}(\underline{N}, \underline{\delta}) dv = \int_D \underline{A}^2(\underline{N}, \underline{\delta}) dv$$

e) Método de los momentos (Yamada y Fujita 1948)

Se toman como funciones de ponderación

$$1, x, x^2, x^3$$

es decir momentos sucesivos del residuo obligándolos a anularse.

Obsérvese que si la familia de ponderación escogida es completa el procedimiento consiste en el límite en obligar a que la solución sea ortogonal, en el espacio de las funciones de cuadrado integrable a todos los miembros de dicha familia lo que para una función continua es lo mismo que especificar su nulidad.

Ejemplo

Un ejemplo completamente paralelo al de la viga en flexión es el de la conducción monodimensional del calor con $k = 1$, donde

$$A(T) = \frac{d^2 T}{dx^2} + Q = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

(Recuérdese que en general $\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q = 0$)

Al igual que en el ejemplo precedente, si \underline{A} es lineal

$$\underline{u} - \underline{N} \underline{\delta} = \underline{\varepsilon}$$

$$A(u) = A(N \delta) + e = 0; A(N \delta) = e$$

y la expresión (13) tiene el significado de anular el error ponderado.

Todos los métodos tradicionales caben en este esquema.

Así por ejemplo,

a) Método de colocación puntual (SLATER 1934).

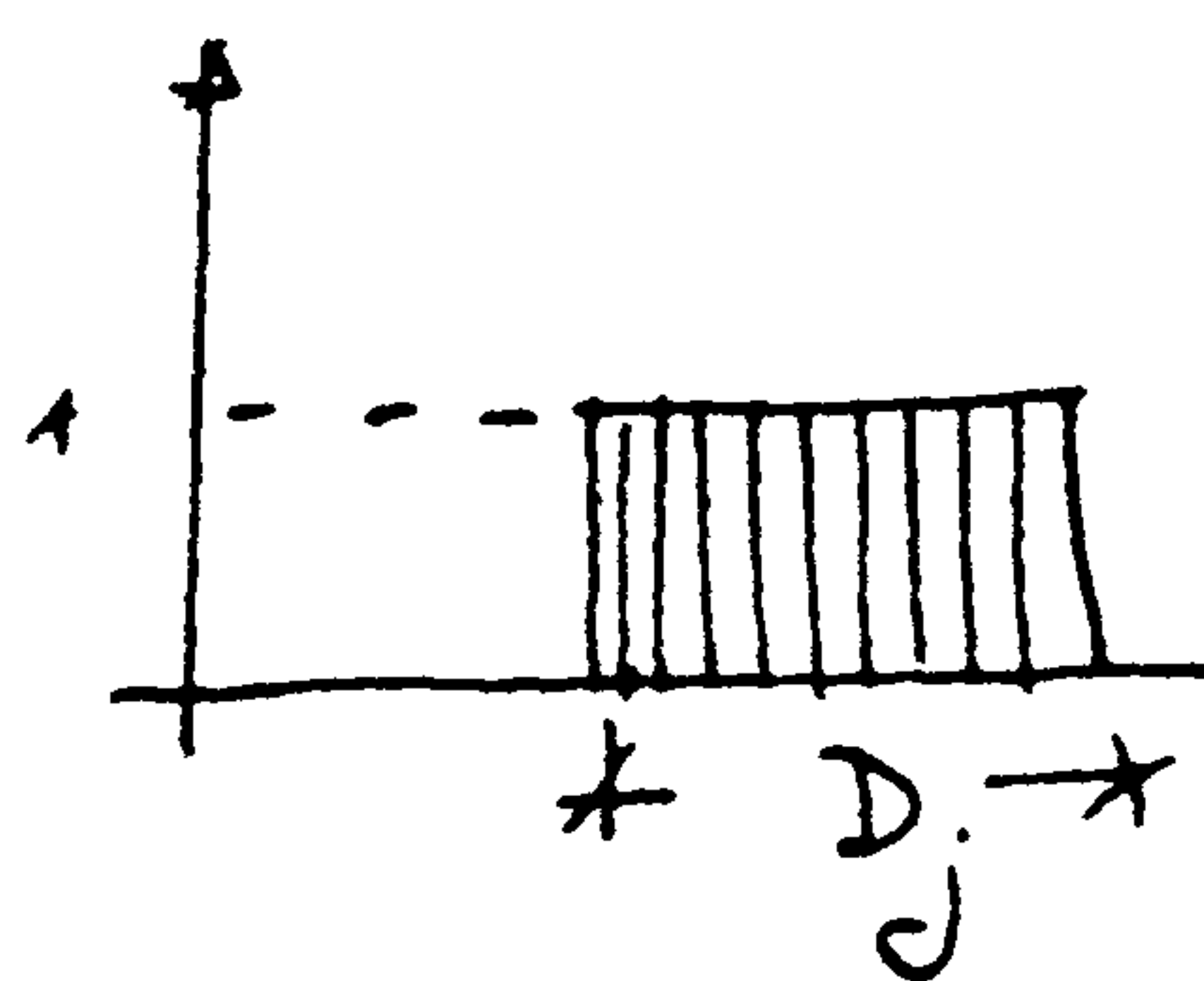
$$\text{Sí} \quad \underline{w}_i = \underline{\delta}_i$$

$$A(\underline{N}_i \underline{\delta}) = 0 \quad \text{si estamos en el dominio}$$

$$B(\underline{N}_i \underline{\delta}) = 0 \quad \text{" " " " contorno.}$$

Es decir el error se anula en n puntos del dominio.

b) Método de colocación en subdominios (Biezeno y Koch 1923)



El error ponderado se anula en ciertas zonas D_j del dominio en las que $\underline{w}_j = 1$.

Así

$$\int_{D_j} a(N \delta) dv = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

c) Método de Galerkin (Bubnov 1913, Galerkin 1915)

Se usan como funciones de ponderación las mismas funciones de interpolación, con lo que

$$\int_D \underline{N}_i^T \underline{A}(\underline{N} \underline{\delta}) dv + \int_{\partial D} \underline{N}_i^T \underline{B}(\underline{N} \underline{\delta}) da = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Supongamos además

$$\begin{cases} Q = 1 & 0 \leq x < \frac{L}{2} \\ Q = 0 & \frac{L}{2} \leq x < L \end{cases}$$

$$T = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases}$$

Supongamos que, como familia aproximante se toma

$$T = \sum T_i \sin i \pi \frac{x}{L}$$

dichas funciones cumplen las condiciones de contorno, por lo que basta estudiar el residuo ponderado en el dominio.

$$\int_D w_i \left[\frac{d^2 \left(\sum T_i \sin i \pi \frac{x}{L} \right)}{dx^2} + Q \right] dx = 0$$

Método de colocación puntual.

Supongamos $x = \delta \left(\frac{L}{2} \right)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(T_1 \sin \pi \frac{x}{L} \right) \Big|_{L/2} + \frac{1}{2} &= 0 \\ T' &= T_1 \frac{\pi}{L} \cos \frac{x}{L} \\ T'' &= -T_1 \left(\pi / L \right)^2 \sin \pi \frac{x}{L} \Big|_{L/2} = -T_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad T_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \quad T_1 = \frac{L^2}{2 \pi^2}$$

$$T = \frac{L^2}{2 \pi^2} \sin \pi \frac{x}{L}$$

$$T \Big|_{x = \frac{\pi}{2} \frac{L}{2}} = \frac{5}{\pi} \sin \pi \frac{x}{L}$$

Un mejor resultado se obtiene con una colocación doble en $x = L/4, 3L/4$ con lo que

$$\begin{cases} -T_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \pi \frac{x}{L} \Big|_{\frac{L}{4}} - T_2 \left(2\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin 2\pi \frac{x}{L} \Big|_{\frac{L}{4}} + 1 = 0 \\ -T_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin \pi \frac{x}{L} \Big|_{\frac{3L}{4}} - T_2 \left(2\frac{\pi}{L}\right)^2 \sin 2\pi \frac{x}{L} \Big|_{\frac{3L}{4}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -T_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - T_2 \left(2\frac{\pi}{L}\right)^2 + 1 = 0 \\ -T_1 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + T_2 \left(2\frac{\pi}{L}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$T_2 = T_1 \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$T_1 \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right] + \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = 0;$$

$$T_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2; \quad T_2 = \frac{1}{8} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2$$

$$T = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \pi \frac{x}{L} + \frac{1}{8} \sin 2\pi \frac{x}{L}$$

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{2}; \quad T = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{L^2}{2}\right); \quad 10 T \frac{\pi}{L^2} = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{\pi} \sqrt{2}$$

Método de Galerkin

$$w_1 = N_1 = \sin \pi \frac{x}{L}$$

$$w_2 = N_2 = \sin 2\pi \frac{x}{L}$$

a) Una sola función

$$T = T_1 \sin \pi \frac{x}{L}$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -T_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\int_0^L \sin \pi \frac{x}{L} \left[Q - T_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} \right] dx = 0$$

$$\int_0^{L/2} \sin \pi \frac{x}{L} - T_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L \sin^2 \pi \frac{x}{L} dx = 0$$

$$-\cos \pi \frac{x}{L} \Big|_0^{L/2} = T_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{\pi}{2}$$

$$1 = T_1 \frac{\pi^3}{2L^2} ; \quad \boxed{T_1 = \frac{2L^2}{\pi^3}} \quad \frac{T}{L^2} \pi \cdot 10 = \frac{20}{\pi^2} \sim 2' \dots$$

b) Dos funciones $T = T_1 \sin \pi \frac{x}{L} + T_2 \sin 2\pi \frac{x}{L}$

$$T'' = -T_1 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \pi \frac{x}{L} - 4T_2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sin 2\pi \frac{x}{L}$$

$$\int_0^L \sin \pi \frac{x}{L} \left[Q - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (T_1 \sin \pi \frac{x}{L} + 4T_2 \sin 2\pi \frac{x}{L}) \right] dx = 0$$

$$\frac{L}{\pi} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \left[T_1 \frac{\pi}{2} \frac{L}{\pi} \right] \quad \boxed{T_1 = \frac{2L^2}{\pi^3}}$$

$$\int_0^{L/2} \sin 2\pi \frac{x}{L} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \int_0^L T_2 \sin^2 2\pi \frac{x}{L} dx \quad \begin{cases} 2\pi \frac{x}{L} = \vartheta \\ \frac{2\pi}{L} dx = d\vartheta \end{cases} \quad \left[\begin{matrix} L \\ 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2\pi \\ 0 \end{matrix} \right]$$

$$\pi = \frac{T}{2} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \pi$$

$$\boxed{T_2 = \frac{L^2}{\pi^3}}$$

$$\boxed{\frac{\pi}{L^2} 10 T = \frac{20}{\pi^2} \sin \pi \frac{x}{L} + \frac{10}{\pi^2} \sin 2\pi \frac{x}{L}}$$

Método de GALERKIN MODIFICADO

Integrando por partes en

$$\int_V w_i \frac{d^2 T}{dx^2} dx = - \int_D w_i Q dx$$

Se obtiene así la weak formulation

$$\left[\begin{array}{l} u = w_i \\ dv = \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx \\ du = dw_i \\ v = \frac{dT}{dx} \end{array} \right] \quad w_i \frac{dT}{dx} \Big|_0^L - \int_D \frac{dw_i}{dx} \frac{dT}{dx} dx = - \int_D w_i Q dx$$

Para que desaparezca el término de contorno buscamos funciones con $w_i(L) = w_i(0) = 0$ y así

$$\int_D \frac{dw_i}{dx} \frac{dT}{dx} dx = \int_D w_i Q dx$$

Además, en lugar de usar funciones definidas globalmente las definimos en elementos.

$$\text{Así vg.: } T = T_1 N_1 + T_2 N_2 + T_3 N_3 = [N_1, N_2, N_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

donde T_1, T_2, T_3 son precisamente los valores en los puntos elegidos para la división en elementos.

Tomemos la primera ecuación

$$\begin{aligned}
 \int_D w_i' T' dx &= \int_{(1),(2)} \frac{dN_1}{dx} \cdot \frac{d}{dx} [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} dx = \\
 &= \int_{(1)} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} T_1 dx + \int_{(2)} \frac{dN_1}{dx} \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx \\
 \int_D w_i Q dx &= \int_{(1),(2)} N_1 Q dx = \int_{(1)} N_1 dx + \int_{(2)} N_1 dx
 \end{aligned}$$

La segunda ecuación seria

$$\begin{aligned}
 \int_{(2),(3)} \frac{dN_2}{dx} \frac{d}{dx} [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} dx &= \int_{(2)} \frac{dN_2}{dx} \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx} \right] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx + \\
 &+ \int_{(3)} \frac{dN_2}{dx} \left[\frac{dN_2}{dx} \quad \frac{dN_3}{dx} \right] \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} dx \\
 \int_D w_i Q dx &= \int_{(2)} N_2 dx + \int_{(3)} N_2 \cdot 0 dx
 \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Si llamamos

$$K_{ij} = \int_{D_j} \frac{dw_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

este tipo de productos se produce en el elemento que va de i a j y está multiplicando a T_j .

Asímismo $F_j = \int N_j Q dx$ corresponde a la ecuación j .

Así pues cabria escribir

$$\sum K_{ij} \cdot T_j = F_j \quad \underline{K} \underline{T} = \underline{F}$$

completamente análoga a la usada en F.E.M. Este último puede así contemplarse como un método de Galerkin con funciones de interpolación locales.

En nuestro caso concreto

$$\begin{aligned} & \left[\int_1 N_1'^2 dx + \int_2 N_1'^2 dx \right] T_1 + \left[\int_2 N_1' N_2' dx \right] T_2 = \int_1 N_1 dx + \int_2 N_1 dx \\ & \left[\int_2 N_2' N_1' dx \right] T_1 + \left[\int_2 N_2'^2 dx + \int_3 N_2'^2 dx \right] T_2 + \left[\int_3 N_2' N_3' dx \right] T_3 = \\ & \quad = \int_2 N_2 dx + \int_3 N_2 \cdot 0 dx \\ & \left[\int_3 N_2' N_3' dx \right] T_2 + \left[\int_3 N_3'^2 dx + \int_4 N_3'^2 dx \right] T_3 = \int_3 N_3^0 dx + \int_4 N_3^0 dx \end{aligned}$$

donde se observa claramente el carácter simétrico y que

el elemento 1 que va de 0 a 1 colabora en k_{11} y F_1

el " 2 " " de 1 a 2 " " $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

el " 3 " " de 2 a 3 " " $\begin{pmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{pmatrix}$ y $\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$

el " 4 " " de 3 a 4 " " k_{33} y F_3

es decir, exactamente las reglas previstas en el F.E.M.

Si se enfoca así directamente, dentro de cada elemento se pueden aplicar todos los métodos anteriores.